Université Paris Diderot

Sur la propriété (T) de Kazhdan pour les groupoïdes mesurés issus d'actions de groupes

Hoareau Fabien
Sous la direction de François Le Maître

2019

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire on se propose d'étudier [Ana03], et plus particulièrement le théorème 5.15, affirmant que si l'on dispose d'une paire de G-espaces ergodiques préservant la mesure, alors la propriété (T) de l'un d'entre eux est équivalente à celle de l'autre. En particulier, si l'on considère un groupe Γ dénombrable agissant de manière libre, ergodique et pmp sur un espace de probabilité standard, alors la propriété (T) de la relation d'équivalence induite est équivalente à celle de Γ.

La partie 1 est séparée en trois sous-parties. La première sert à définir le langage qui sera utilisé tout au long de ce mémoire, à savoir celui des espaces fibrés, également détaillé dans [Ana03]. La deuxième présente de manière succincte les notions de groupoïdes et d'actions de groupoïdes, et les deux exemples fondamentaux que sont les relations d'équivalence et les groupoïdes produit semi-directs y sont également introduits. La troisième sous-partie est consacrée au théorème de désintégration de mesures, qui y est énoncé sans preuve.

C'est dans la la partie 2 que l'on munit les groupoïdes de leur structure mesurée. On commence par s'intéresser au cas particulier des relations d'équivalence en tant que groupoïdes mesurés ([Hah78]), ainsi qu'à leurs représentations et leur cohomologie. La propriété (T) de Kazhdan, très étudiée dans le cas des groupes, ([BHV08], [HV89]) peut également être définie grâce à ces notions cohomologiques. On étend ensuite dans un second temps toute cette construction au cas général des groupoïdes mesurés quelconques, après les avoir définis. Peter Hahn a montré dans [Hah78] que les deux points de vue que l'on rencontre dans la littérature sont équivalents, et l'on a ici fait le choix de les définir à partir d'une classe de mesure symétrique et invariante, en introduisant un peu plus tard la notion de système de Haar.
Un intérêt tout particulier sera bien sûr accordé à la notion d'ergodicité, qui est introduite dans 2.3. Les groupoïdes ergodiques ont commencé à être étudiés par Mackey, sous le nom de groupes virtuels, appellation reprise par Ramsay ([Ram71]), et constituent le bon cadre pour notre étude. On conclura cette partie par l'énoncé de la propriété (T) pour un groupoïde mesuré quelconque.

La partie 3 constitue l'essentiel de ce mémoire, et la majorité des résultats que l'on a choisi d'étudier s'y situe. La première sous-partie est consacrée aux espaces de Hilbert affines et aux actions affines associées aux cocycles. On pourra consulter [HV89] pour plus de détails concernant les constructions, assez techniques pour certaines.
La deuxième sous-partie a pour but d'établir une équivalence entre la propriété (T) d'un groupoïde ergodique et la trivialité des groupes de cohomologie associés aux représentations du groupoïde en question. La preuve de ce résultat passera par une caractérisation des cobords, qui pour des raisons techniques ne pourra être obtenue que dans le cas dénombrable (ou r-discret).
La dernière sous-partie consiste en la preuve du théorème central de ce mémoire, ainsi que du lemme cohomologique servant à le prouver. Ces preuves nécessiteront les caractérisations précédemment établies, ainsi que la notion de représentation induite détaillée dans [Ram76].

La partie 4 a pour objectif de généraliser le théorème central au cas d'actions d'un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts. Divers outils de théorie descriptive des ensembles, que l'on pourra retrouver dans [Kec75], seront utilisés dans les preuves des lemmes préliminaires, et les énoncés des théorèmes ainsi prouvés concluront ce mémoire.

1. Préliminaires

Dans cette partie préliminaire on introduit plusieurs outils qui nous serviront à définir la propriété (T) de Kazhdan pour les groupoïdes.
Dans toute la suite, sauf contre-indication, on considèrera que X est un espace mesurable, et on fixe μ une mesure telle que (X, μ) soit un espace probabilisé.

1.1. Notions de fibrés.

Commençons dans ce paragraphe par introduire un peu de langage des fibrés Boréliens et Hilbertiens, ainsi que des notions de mesures "intéressantes" dans ce contexte, qui vont nous permettre de définir la notion de représentations de relations d'équivalences, et plus généralement de groupoïdes mesurés. On terminera le paragraphe par deux propositions sur l'espace des sections d'un fibré Hilbertien. Les définitions données ici sont principalement tirées de [Ana03].

Définition 1.1. Dans cette définition, X pourra être un ensemble quelconque.

(1) On appelle **fibré au dessus de** X un couple (U, p), parfois noté $p : U \to X$, où U est un ensemble et p est une application. On dit que X est la **base du fibré**, et que U est la **fibre de l'espace**.
(2) Pour (U, p) un fibré au dessus de X, on note pour tout $A \subseteq U$ et tout $x \in X$, $A_x = A \cap p^{-1}(x)$. On se servira particulièrement des ensembles de la forme U_x, que l'on appelle **la fibre de** x, pour $x \in X$.
(3) Un fibré (U, p) est dit **localement dénombrable** si U_x est dénombrable pour tout $x \in X$.

Définition 1.2. Un fibré (U, p) au dessus de X est un **fibré Borélien** si U est un Borélien standard et si p est une application Borélienne.

Définition 1.3. On appelle **section d'un fibré** (U, p) au dessus de X une application $\xi : X \to U$ telle que $p \circ \xi(x) = x$ pour tout x dans X.

Définition 1.4. Étant donné deux espaces fibrés (U, p) et (V, q) au dessus de X, on considère leur **produit fibré**

$$U * V = \{(u, v) \in U \times V \mid p(u) = q(v)\}.$$

En particulier, on remarque qu'un fibré (U, p) peut s'écrire $X * U$, où X est vu comme fibré au dessus de X par l'identité. On notera parfois $U\, {}_p{*}_q\, V$ pour préciser les applications définissant les fibrés. Un produit fibré de fibrés Boréliens est un fibré Borélien.

Définition 1.5. On appelle **système Borélien de mesures** pour un fibré Borélien (U, p) au dessus de X une famille de mesures positives $\{\nu^x \mid x \in X\}$, telle que pour tout $x \in X$, ν^x soit à support dans U_x. On impose de plus que pour toute fonction Borélienne positive f définie sur U, $x \mapsto \int_U f d\nu^x$ soit Borélienne. On dit de plus que le système est propre lorsqu'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}_+$ telle que l'application $x \mapsto \int_U f d\nu^x$ soit identiquement égale à 1.

Exemple 1.6. *Si l'on considère* X *comme fibré au dessus de* X *par l'application identité, alors* $\forall x \in X$: $X_x = x$*, et alors* $\{\delta_x\}_{x \in X}$ *est un système Borélien de mesures, où* δ_x *désigne la masse de Dirac en* x*. Il est propre, car l'application constante égale à* 1 *convient.*

Définition 1.7. On appelle **fibré Hilbertien**, ou fibré Hilbertien séparé Borélien selon certains auteurs, au dessus de X la donnée d'un fibré Borélien $(\mathcal{H}, p)$, où $p : \mathcal{H} \to X$ est une application surjective telle que pour tout x dans X, la fibre $\mathcal{H}_x = p^{-1}(x)$ soit un espace de Hilbert complexe, de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ et de norme $\| \cdot \|_x$. On demande de plus l'existence d'une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sections vérifiant les conditions suivantes :

- Pour tout $x \in X$, la suite $(\xi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $\mathcal{H}_x$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $v \in \mathcal{H} \mapsto \langle v, \xi_n(p(v)) \rangle_{p(v)} \in \mathbb{C}$ est Borélienne.
- Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto \langle \xi_n(x), \xi_m(x) \rangle_x$ est Borélienne.

On notera $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_x)_{x \in X}$. Pour éviter de préciser en quel point on se place, on écrira parfois $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$, où il est entendu que l'on considère l'espace de Hilbert au dessus de l'élément qui convient.

Remarque 1.8. Dans la définition précédente, on ne considèrera que des espaces de Hilbert séparables.

Remarque 1.9. Il est utile de remarquer que lorsque les fibres $\mathcal{H}_x$ ont toutes la même dimension Hilbertienne, elles sont unitairement isomorphes, et on peut alors considérer que le fibré hilbertien est trivial, c'est-à-dire que la donnée du fibré $\mathcal{H}$ est équivalente à celle d'un espace de Hilbert $\mathcal{K}$.
En effet, supposons que toutes les fibres $\mathcal{H}_x$ soient de même dimension n. On fixe $\mathcal{K}$ un espace de Hilbert de dimension $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, dont $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base Hilbertienne. On considère de plus $(\xi_n')_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sections vérifiant les conditions de la définition précédente, et telle que pour tout $x \in X$ la suite $(\xi_n'(x))$ soit une base orthonormale de $\mathcal{H}_x$. Posons pour $x \in X$ l'application

$$\phi_x : v \in \mathcal{H}_x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle v, \xi_i'(p(v))\rangle_x e_i \in \mathcal{K},$$

et considérons $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{K}\times X$ définie par $\phi(v) = (\phi_{p(v)}(v), p(v))$. Alors ϕ est une application bijective, elle vérifie $p_{\mathcal{K}}\circ\phi = p$, où $p_{\mathcal{K}}$ désigne la projection à droite de $\mathcal{K}\times X$ sur X, et sur chaque fibre $p^{-1}(x)$ elle donne un isomorphisme unitaire entre $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{K}$. L'inverse de ϕ est donné par $\phi^{-1}(x, v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle_{\mathcal{K}} \xi_i'(x)$, qui est mesurable par les axiomes de la définition précédente. La structure Borélienne de $\mathcal{K} \times X$ est engendrée par $p_{\mathcal{K}}$ et les fonctions $(v, x) \mapsto \langle v, e_i\rangle_{\mathcal{K}}$, $i \in [\![1, n]\!]$, et donc ϕ est bien mesurable car les $v \mapsto \langle \phi_{p(v)}(v), e_i\rangle_{\mathcal{K}}$ et $p_{\mathcal{K}} \circ \phi = p$ sont toutes mesurables.
On peut donc dans le cas où les fibres sont toutes de même dimension, considérer le fibré trivial $\mathcal{K} \times X$ muni de la projection à droite.

Définition 1.10. Pour $(\mathcal{H}, p)$ un fibré Hilbertien au dessus de X, on note $S(X, \mu, \mathcal{H})$ l'ensemble des sections Boréliennes $\xi : X \to \mathcal{H}$, où l'on identifie deux sections qui sont égales μ-presque partout. On remarque que cette identification ne dépend que de la classe de μ.
On note de plus $S_1(X, \mu, \mathcal{H})$ l'ensemble des sections Boréliennes $\xi : X \to \mathcal{H}$ telles que $\|\xi(x)\|_x = 1$ μ-presque partout, où ici encore l'on identifie deux sections coïncidant μ-presque partout. De telles sections sont appelées **sections unité**.

On conclut ce premier paragraphe préliminaire par deux résultats portant sur la structure de l'espace des sections d'un fibré Hilbertien $\mathcal{H}$ au dessus de X.

Proposition 1.11. *Soient deux sections $\xi_1, \xi_2 : X \to \mathcal{H}$. On définit*

$$d(\xi_1, \xi_2) = \int_X \frac{\|\xi_1(x) - \xi_2(x)\|}{1 + \|\xi_1(x) - \xi_2(x)\|} d\mu(x)$$

qui munit $S(X, \mu, \mathcal{H})$ d'une structure d'espace métrique. On a de plus, pour $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $S(X, \mu, \mathcal{H})$ et ξ un élément de $S(X, \mu, \mathcal{H})$, équivalence entre les conditions suivantes :

(1) $\xi_n \longrightarrow \xi$ pour la métrique d, i.e. $\lim_{n\to\infty} d(\xi_n, \xi) = 0$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \mu(\frac{\|\xi_n-\xi\|}{1+\|\xi_n-\xi\|} \geqslant \varepsilon) = 0$;

(3) Toute sous-suite de $(\xi_n)_n$ admet une sous-suite convergeant en norme μ-presque partout vers ξ.

Démonstration. (1) ⇒ (2). Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité de Markov nous donne $\varepsilon\, \mu(\frac{\|\xi_1-\xi_2\|}{1+\|\xi_1-\xi_2\|} \geqslant \varepsilon) \leqslant d(\xi_1, \xi_2)$, ce qui prouve l'implication.
(2) ⇒ (3). Considérons la suite $(\delta_n(x))_n = (\frac{\|\xi_n(x)-\xi(x)\|}{1+\|\xi_n(x)-\xi(x)\|})_n$. Toute sous-suite de cette suite converge en mesure vers 0 (au sens de *(2)*), et donc admet une sous-suite convergeant μ-presque partout vers 0. Redémontrons ce fait général.
Considérons $\{\, f_n : (E, \mu) \to (F, \|\cdot\|) \mid n \in \mathbb{N}\}$, une suite de fonctions convergeant en mesure vers une fonction f . Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mu(\{\, x\,, \|f_n(x) - f(x)\| > \epsilon\}) \longrightarrow 0$. Soient alors $\varepsilon > 0$ et $n_0 = 0$. On définit une sous-suite (n_k) de la manière suivante : pour $k \geqslant 1$, il existe $n_k > n_{k-1}$ tel que $\forall n > n_k$: $\mu(\{\, x\,, \|f_n(x) - f(x)\| > \frac{1}{k}\,\}) \leqslant \frac{1}{k^2}$. On a alors par le lemme de Borel-Cantelli que presque partout il y a un nombre fini de k tels que $\|f_{n_k}(x) - f(x)\| > \frac{1}{k}$. Donc $f_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} f$.
(3) ⇒ (1). Si *(3)* est vraie, en particulier on a la convergence au sens de *(2)* de $\delta_n(x)$ vers 0, *i.e.* $\lim_{n\to\infty} \mu(\{\, x \in X \mid \delta_n(x) \geqslant \varepsilon\,\}) = 0$, et alors d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\lim_{n\to\infty} d(\xi_n, \xi) = 0$, ce qui conclut la preuve.

$\diamondsuit$

Proposition 1.12. $S(X, \mu, \mathcal{H})$ *est un espace vectoriel topologique complètement métrisable.*

Démonstration. La distance d définie dans la proposition précédente munit évidemment l'espace vectoriel $S(X, \mu, \mathcal{H})$ d'une structure d'espace métrique. Montrons que cet espace est complet.

Soit $(\xi_n)_n$ une suite de Cauchy dans $S(X,\mu,\mathcal{H})$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $d(\xi_n,\xi_{n+1}) \leqslant 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_X \frac{\|\xi_n(x)-\xi_{n+1}(x)\|}{1+\|\xi_n(x)-\xi_{n+1}(x)\|} d\mu(x) < +\infty$$

et donc en intervertissant les symboles d'intégration par le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\|\xi_n-\xi_{n+1}\|}{1+\|\xi_n-\xi_{n+1}\|} < +\infty \quad \mu\text{-presque partout.}$$

La série $\sum \|\xi_n - \xi_{n+1}\|$ étant de même nature, elle converge également μ-presque partout. Ainsi la suite $(\|\xi_n(x)-\xi_{n+1}(x)\|)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}_x$ pour μ-presque tout $x \in X$. Par complétude de $\mathcal{H}_x$, on peut définir une limite $\xi(x) \in \mathcal{H}_x$, et donc construire la section $\xi \in S(X,\mu,\mathcal{H})$. Cette section est bien limite de la suite de Cauchy originale d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, car

$$\lim_{n\to\infty} d(\xi_n,\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{\|\xi_n(x)-\xi(x)\|}{1+\|\xi_n(x)-\xi(x)\|} d\mu(x) = 0.$$

$\diamondsuit$

1.2. **Groupoïdes et actions de groupoïdes.**

Dans ce paragraphe on redonne la définition de groupoïde, et on s'intéresse à deux classes de groupoïdes qui nous serviront particulièrement ; les relations d'équivalence et les groupoïdes produit semi-direct de groupes de transformation, notion que l'on étendra après avoir rappelé la définition d'une action de groupoïde.

Définition 1.13. (Groupoïde [Pat99]). Un **groupoïde** est l'ensemble des morphismes d'une petite catégorie, dans laquelle tous les morphismes sont des isomorphismes. Donnons également une définition axiomatique équivalente, plus facilement manipulable, ce qui sera aussi l'occasion d'introduire quelques notations qui nous seront utiles.
Un groupoïde est la donnée d'un ensemble G, de deux applications de G dans G *source* s et *range* r (où la terminologie est inspirée par le point de vue catégorique), telles que toutes les fibres sont non vides, d'un sous-ensemble $G^{(2)} = G\,{}_s{*}_r\,G \subseteq G \times G$ appelé l'ensemble des paires composables, d'une application *composition* (ou produit) $(g',g) \in G^{(2)} \mapsto g'g \in G$ et d'une application *inverse* $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$, telles que

1. pour tout $g \in G$, $(g^{-1})^{-1} = g$
2. pour $(g_3,g_2),(g_2,g_1) \in G^{(2)}$, on a $(g_3g_2,g_1),(g_3,g_2g_1) \in G^{(2)}$ et $g_3(g_2g_1) = (g_3g_2)g_1$.
3. pour tout $g_2 \in G$, $(g_2,g_2^{-1}) \in G^{(2)}$, et si $(g_2,g_1) \in G^{(2)}$, alors $g_2^{-1}(g_2g_1) = g_1$ et $(g_2g_1)g_1^{-1} = g_2$.

On définit de plus l'ensemble des unités de G comme étant $G^0 = \{gg^{-1} \mid g \in G\}$, et on a alors $s : g \in G \mapsto g^{-1}g \in G^0$ et $r : g \in G \mapsto gg^{-1} \in G^0$.
Un **groupoïde Borélien** est un groupoïde muni d'une structure de Borélien standard, pour laquelle les applications en jeu sont Boréliennes. Plus précisément, $G^{(2)}$ est un Borélien de $G \times G$, et les applications *composition* et *inverse* sont Boréliennes.

Définition 1.14. Soient G un groupoïde et $A \subseteq G^0$. On note $[A] = s(r^{-1}(A))$ la **saturation** de A. On dit de plus que A est **invariant** lorsque $A = [A]$. Il est immédiat que $[A]$ est invariant.

Définition 1.15. On dit qu'un groupoïde est **r-discret** si chaque fibre $r^{-1}(a)$, $a \in G^0$, est dénombrable. C'est la bonne généralisation aux groupoïdes de la notion de dénombrabilité pour les groupes.

Exemple 1.16. *Une relation d'équivalence $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ sur X un ensemble est naturellement munie d'une structure de groupoïde. Il suffit en effet de considérer comme inverse $(y,x)^{-1} = (x,y)$ et comme composition $(z,y)(y,x) = (z,x)$. Les applications s et r correspondent donc aux projections à droite et à gauche respectivement.*
Si la relation d'équivalence est dénombrable, le groupoïde associé est r-discret.

Remarque 1.17. Dans le cadre de l'exemple 1.16, qui sera un de nos cadres privilégiés pour la suite, on identifie l'ensemble des unités $\mathcal{R}^0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ à l'ensemble X.

Après avoir remarqué qu'une relation d'équivalence était munie d'une structure de groupoïde, on définit la deuxième structure qui nous intéressera, celle du produit semi-direct d'un espace par un groupe agissant sur cet espace.

Définition 1.18. (Produit semi-direct [ADR00]) Soit Γ un groupe agissant à gauche sur X un ensemble. Alors l'ensemble $\{(y,\gamma,x) \in X \times \Gamma \times X \mid \gamma x = y\}$ est naturellement muni d'une structure de groupoïde, où X est identifié à l'ensemble des unités. On identifie également $r(y,\gamma,x)$ à y et $s(y,\gamma,x)$ à x. Il suffit en effet de définir l'inverse et la composition de la manière suivante : $(x,\gamma,y)^{-1} = (y,\gamma^{-1},x)$ et $(z,\gamma',y)(y,\gamma,x) = (z,\gamma'\gamma,x)$.
On appelle ce groupoïde le **produit semi-direct du groupe de transformation** (Γ, X) et on le note $\Gamma \ltimes X$.

Établissons tout de suite le lien entre les deux types de groupoïdes que l'on vient de définir à travers l'exemple suivant, dans le cas qui va nous intéresser par la suite ; celui d'une action libre.

Exemple 1.19. *Si un groupe Γ agit par bijections Boréliennes sur un Borélien standard X de manière libre, alors la relation d'équivalence $\mathcal{R} = \{(x,\gamma x) \mid x \in X, \gamma \in \Gamma\}$ est un groupoïde produit semi-direct Borélien.*
En effet, si l'on considère $\Gamma \ltimes X$ défini comme précédemment, on dispose d'une bijection donnée par

$$(y,\gamma,x) \in \Gamma \ltimes X \mapsto (x,y) \in \mathcal{R},$$

d'inverse

$$(x,\gamma x) \in \mathcal{R} \mapsto (\gamma x,\gamma,x) \in \Gamma \ltimes X,$$

qui est évidemment surjective, et est injective d'après la liberté de l'action. En effet la liberté garantit qu'au plus un γ envoie un x donné sur un y donné, et alors la situation suivante ne peut se produire pour $\gamma \neq \gamma'$;

$$y \underset{\gamma'}{\overset{\gamma}{\leftleftarrows}} x \ .$$

On voit qu'une structure de groupoïde se dégage naturellement de la donnée d'une action de groupe. Voyons alors ce que l'on obtient dans le cas d'une action de groupoïde sur un espace. Comme pour les actions de groupes, on ne considère que des actions à gauche. Il est bien sûr possible de définir des actions à droite de manière similaire. Notons également que l'on se restreint dès maintenant au cadre Borélien.

Définition 1.20. Soit G un groupoïde Borélien. Un **G-espace** à gauche consiste en la donnée de X un Borélien standard, muni d'une surjection Borélienne $p : X \to G^0$ (appelée la projection, parfois notée p_X si le besoin s'en fait ressentir) et d'une application Borélienne (appelée l'action)

$$\begin{array}{ccc} G\,{}_s{*}_p\,X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes

(1) $\forall\, x \in X : p(x)x = x$

(2) $\forall\, (g,x) \in G\,{}_s{*}_p\,X : p(gx) = r(g)$

(3) Si $(g_1,x) \in G\,{}_s{*}_p\,X$ et $(g_2,g_1) \in G^{(2)}$ alors $g_2(g_1x) = (g_2g_1)x$.

Remarque 1.21. On remarque que l'ensemble des unités G^0 peut être vu comme G-espace à gauche, dès lors qu'il est muni de la projection identité, et de l'action

$$\begin{array}{ccc} G\,{}_s{*}_{id}\,G^0 & \longrightarrow & G^0 \\ (g,s(g)) & \longmapsto & r(g). \end{array}$$

Comme dans le cas d'une action de groupe, on peut définir le produit semi-direct associé à un G-espace.

Remarque 1.22. Soit X un G-espace. On peut définir, comme dans la définition 1.18, le produit semi-direct $G \ltimes X$ comme étant l'ensemble

$$\{(y,g,x) \in X \times G \times X \mid p(x) = s(g), p(y) = r(g), gx = y\}$$

muni des mêmes lois que précédemment. On peut toujours identifier X à l'ensemble des unités. On remarque néanmoins que la structure de groupoïde de ce produit semi-direct est simplement donnée par le produit fibré $X\,{}_p{*}_r\, G = \{(x, g) \mid p(x) = r(g)\}$, il suffit en effet de définir le **produit semi-direct** $X \rtimes G$ comme étant l'ensemble $X\,{}_p{*}_r\, G$, avec les applications *source*, *range* et inverse définies par

$$\begin{gathered} s(x, g) = g^{-1}x \\ r(x, g) = x \\ (x, g)^{-1} = (g^{-1}x, g^{-1}), \end{gathered}$$

et la composition définie par

$$(x, g_1)(g_1^{-1}x, g_2) = (x, g_1g_2),$$

qui n'est que l'interprétation du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} x & & g_2^{-1}g_1^{-1}x \arrow[ll, "g_1g_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & g_1^{-1}x \arrow[ul, "g_1"] & \end{tikzcd}$$

On peut donc effectivement "omettre l'information de la source" de l'action dans la description du groupoïde produit semi-direct, mais ces deux définitions sont équivalentes. Dans la suite on utilisera cette seconde notation.

Remarque 1.23. Il est bon de remarquer que le produit semi-direct $G^0 \rtimes G$ n'est autre que le groupoïde G lui-même.

Remarque 1.24. On remarque aisément qu'un groupoïde G est r-discret si et seulement si tout G-espace est r-discret.

Terminons alors ce paragraphe par la définition d'applications G-équivariantes, généralisation naturelle du même concept dans le cas d'une action de groupe.

Définition 1.25. On dit qu'une surjection Borélienne $\phi : Y \to Z$ entre deux G-espaces à gauche est **G-équivariante** lorsque pour tout $(g, y) \in G\,{}_s{*}_{p_Y}\, Y$, les conditions suivantes sont vérifiées

(1) $(g, \phi(y)) \in G\,{}_s{*}_{p_Z}\, Z$
(2) $\phi(gy) = g\phi(y)$.

1.3. **Le théorème de désintégration de mesures.**

Rappelons maintenant un théorème essentiel de la théorie de la mesure : le théorème de désintégration de mesures. Il nous servira à donner une structure mesurée convenable aux groupoïdes en désintégrant la mesure sur G par rapport à l'application *range* de manière à ce qu'elle soit "compatible" avec celle sur l'ensemble des unités. On commence par définir les désintégrations, avant d'en donner quelques propriétés. On énoncera ensuite le théorème dans une version générale sans donner de preuve.
On pourra trouver un énoncé de ce résultat classique par exemple dans [Gla03].

Définition 1.26. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés, et soit $p : Y \to X$ une application mesurable. On appelle **μ-désintégration fibre à fibre** de ν par p une famille de mesures $\nu(\,\cdot \mid x)$ sur $(Y, \mathcal{B})$ avec $x \in X$, telles que

- $\forall x \in X : \nu(\,\cdot \mid x)$ est concentrée sur $p^{-1}(x)$, *i.e.* $\nu(Y \setminus p^{-1}(x) \mid x) = 0$;
- $\forall B \in \mathcal{B} : \nu(\,B \mid x)$ est une fonction $\mathcal{A}$-mesurable de X, et on a $\nu(B) = \displaystyle\int_X \nu(\,B \mid x)d\mu(x)$.

On appelle **mesure conditionnelle** la mesure $d\nu(\,y \mid x)$, où y parcourt $p^{-1}(x)$, et informellement on a

$$d\nu(y) = \int_X d\nu(\,y \mid x)d\mu(x).$$

Proposition 1.27. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *deux espaces mesurés,* $p : Y \to X$ *une application mesurable et* $\nu(\,\cdot \mid x)$ *une* μ*-désintégration de* ν *par* p*. On notera* $p_*\nu$ *la mesure définie par* $p_*\nu(A) = \nu(p^{-1}(A))$*,* $A \in \mathcal{A}$*. Alors*

(1) $\forall B \in \mathcal{B}, \forall A \in \mathcal{A} : \nu(B \cap p^{-1}(A)) = \displaystyle\int_A \nu(\,B \mid x)d\mu(x)$
(2) $p_*\nu$ *est* μ*-mesurable, et* $x \mapsto \nu(\,y \mid x)$ *est la densité de Radon-Nikodym de* $p_*\nu$ *par rapport à* μ *:*

$$\nu(\,Y \mid x) = \frac{dp_*\nu(x)}{d\mu(x)}$$

(3) *Pour toute fonction* $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$*-mesurable* $F : Y \times X \to [0, +\infty]$*, on a*

$$\int_Y F(y, p(y)) d\nu(y) = \int_X \int_Y F(y, x) d\nu(\, y \mid x) d\mu(x).$$

(4) *les mesures* μ *et* $p_*\nu$ *sont équivalentes.*

Démonstration. On ne prouve ici que *(4)*. Soit A un Borélien de X. On a d'après *(2)* que $\mu(A) = 0 \Rightarrow p_*\nu(A) = 0$. Réciproquement, si A est tel que $\nu(p^{-1}(A)) = 0$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X \nu(\, p^{-1}(A) \mid x) d\mu(x) \\ &= \int_X \nu(\, p^{-1}(A) \cap p^{-1}(x) \mid x) d\mu(x) \\ &= \int_A \nu(\, p^{-1}(x) \mid x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Comme les mesures en jeu sont positives, on a bien $\mu(A) = 0$, ce qui conclut la preuve.

$\diamondsuit$

Théorème 1.28. *Théorème de désintégration.*
Soient Y *un espace Polonais muni de sa tribu Borélienne* $\mathcal{B}$ *et d'une mesure de Borel* σ*-finie* ν*. Soit* X *un espace topologique dénombrablement engendré muni de sa tribu Borélienne* $\mathcal{A}$*, dans lequel les singletons sont mesurables, et soit* μ *une mesure* σ*-finie sur* $(X, \mathcal{A})$*. Soit* $p : Y \to X$ *une application mesurable. On suppose que la mesure image* $p_*\nu$ *de* ν *par* p *ne charge pas les ensembles* μ*-négligeables. Alors il existe une* μ*-désintégration fibre à fibre* $\nu(\,\cdot \mid x)$ *de* ν *par* p*. De plus cette désintégration est unique à modification sur un ensemble* μ*-négligeable près.*

2. Groupoïdes mesurés et propriété (T)

Dans cette section on définit une structure mesurée pour les relations d'équivalence vues en tant que groupoïdes, puis on donne les définitions cohomologiques permettant de parler de propriété (T) dans ce cadre particulier. Dans un deuxième temps, on définira les groupoïdes mesurés de manière générale, puis on étendra toutes les structures précédemment définies à ce nouveau cadre, en terminant ici encore par la définition de la propriété (T), cette fois pour un groupoïde mesuré quelconque. On a choisi de présenter les choses dans cet ordre car la bonne compréhension du cas des relations d'équivalence éclaire le cas général. Les deux premières parties sont inspirées de travaux non publiés de Tucker-Drob. On fixera dans cette partie $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence Borélienne dénombrable préservant la mesure de probabilité (pmp) sur (X, μ) un espace de probabilité standard, et G un groupoïde Borélien. Les applications r et s seront les applications *range* et *source* de G, et l'on précisera desquelles il s'agit s'il y a risque de confusion.

2.1. **Représentations et cohomologie des relations d'équivalences Boréliennes dénombrables.**

On définit la notion de représentation de $\mathcal{R}$ en tant que cas particulier de groupoïde, puis des notions cohomologiques associées à $\mathcal{R}$ en tant que représentation d'équivalence mesurée, ces dernières dépendant de la structure mesurée que nous allons détailler en premier lieu.

Définition 2.1. Une **représentation unitaire** de $\mathcal{R}$ est la donnée d'un fibré Hilbertien $\mathcal{H}$ au dessus de X et d'une application $\pi : \mathcal{R} * \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, où $\mathcal{R}$ est fibré au dessus de X par la projection à droite, telle que

(1) Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, l'application $(y, x) \mapsto \langle \pi(y, x)\xi_n(x), \xi_m(y) \rangle_y$ est Borélienne, où $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est comme dans la définition 1.7 ;

(2) Pour tout $(y, x) \in \mathcal{R}$, l'application $\pi(y, x) : v \mapsto \pi(y, x)v$ est un isomorphisme unitaire entre $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_y$;

(3) $\pi(z, y)\pi(y, x) = \pi(z, x)$ lorsque $z\mathcal{R}y\mathcal{R}x$.

En particulier, on a $\pi(x, y) = \pi(y, x)^{-1}$.

On souhaite désormais donner une structure mesurée à $\mathcal{R}$ afin que ses représentations donnent assez d'information pour pouvoir définir la propriété (T) de Kazhdan. Cette structure mesurée est construite à partir du théorème de désintégration rappelé plus tôt, et est ici décrite de façon explicite.

Définition 2.2. (Relation d'équivalence mesurée [Hah78])
Soit $(\alpha_x)_{x\in X}$ une famille de mesures de probabilité sur X vérifiant les conditions suivantes

1. $\alpha_x([x]) = 1$ pour μ-presque tout x dans X, où $[x]$ désigne la $\mathcal{R}$-classe de x.
2. Pour tout ensemble A Borélien de X, $x \mapsto \alpha_x(A)$ est Borélienne.
3. Il existe un ensemble X_1 de mesure pleine dans X tel que si $(y, x) \in \mathcal{R} \cap (X_1 \times X_1)$ alors les mesures α_x et α_y sont équivalentes.
4. Si f est une fonction positive sur $\mathcal{R}$ et si $\int f(x, y)d\alpha_x(y)d\mu(x) = 0$ alors $\int f(y, x)d\alpha_x(y)d\mu(x) = 0$.

Pour E un Borélien de $\mathcal{R}$, on définit alors une mesure sur $\mathcal{R}$ par

$$\lambda(E) = \int_{X^2} \mathbb{1}_E(x, y)d\alpha_x(y)d\mu(x).$$

C'est cette mesure, ou plus exactement sa classe d'équivalence, qui munit $\mathcal{R}$ de la structure mesurée recherchée. On notera ainsi $(\mathcal{R}, [\lambda])$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ vue en tant que groupoïde mesuré, et ν une mesure de probabilité dans la classe $[\lambda]$.

Remarque 2.3. Comme l'espace X est un Borélien standard, il est métrisable, et donc à base dénombrable d'ouverts. L'hypothèse "dénombrablement engendré" du théorème de désintégration est donc ici bien vérifiée, tout comme l'hypothèse de mesurabilité des singletons.
Remarquons alors que la famille de mesures $(\alpha_x)_{x\in X}$ est bien la désintégration de λ par rapport à $r : \mathcal{R} \to X$, poussée en avant par cette même application. En effet, les espaces en jeu vérifient les hypothèses du théorème, et si A est un Borélien de X tel que $\mu(A) = 0$, alors

$$\int_{X^2} \mathbb{1}_{(A\times X)\cap\mathcal{R}}(x, y)d\alpha_x(y)d\mu(x) = \lambda((A \times X) \cap \mathcal{R}) = 0$$

ce qui implique que $\nu((A \times X) \cap \mathcal{R}) = 0$, car ν et λ sont dans la même classe, ce qui assure que $r_*\nu(A) = \nu(r^{-1}(A)) = 0$. Toutes les hypothèses sont donc bien vérifiées, et la famille $(\alpha_x)_{x\in X}$ est donc l'unique désintégration de λ par rapport à r fournie par le théorème.
D'après la proposition 1.27, les mesures μ et $r_*\nu$, qui sont les deux mesures naturelles dont nous disposons sur X, sont équivalentes. Ce phénomène reste vrai dans le cadre plus général qui suivra.

Dans toute la suite on considèrera $(\mathcal{R}, [\lambda])$ une relation d'équivalence munie de sa structure mesurée.
On fixe ν une mesure de probabilité dans la classe $[\lambda]$.
On va maintenant donner la définition de réduction inessentielle, qui donne un cadre rigoureux à l'intuition "à mesure nulle près" pour les relations d'équivalence mesurées.

Définition 2.4. Si A est un ensemble de mesure pleine pour μ, on appelle **réduction inessentielle** de $\mathcal{R}$ à A la donnée de $(\mathcal{R}_{|A\times A}, [\lambda]_{|A\times A})$, où $[\lambda]_{|A\times A}$ contient les restrictions à $\mathcal{R}_{|A\times A}$ des mesures dans la classe $[\lambda]$.
Dans la suite quand on parlera de représentation de relation d'équivalence mesurée, on considèrera un fibré Hilbertien $\mathcal{H}$ et une application π telle que les propriétés de la définition 2.1 soient vraies sur une réduction inessentielle de $(\mathcal{R}, [\lambda])$.

Définition 2.5. Soient $(\mathcal{H}, \pi)$, une représentation de $\mathcal{R}$. Soit alors $b : \mathcal{R} \to \mathcal{H}$ une application Borélienne telle que pour tout $(y, x) \in \mathcal{R}$, $b(y, x) \in \mathcal{H}_y$

1. b est un **π-cocycle propre** si pour tout $((z, y), (y, x)) \in \mathcal{R}^{(2)}$ on a
$$b(z, x) = b(z, y) + \pi(z, y)b(y, x).$$
On appelle cette égalité la relation de cocycle.
2. b est un **π-cocycle** s'il existe une réduction inessentielle $(\mathcal{R}_{|A\times A}, [\lambda]_{|A\times A})$ telle qu'en restriction à cette réduction, b soit un π-cocycle propre.

Définition 2.6. Un π-cocycle est un **π-cobord** s'il existe une section Borélienne $\xi : X \to \mathcal{H}$ telle que

$$b(y, x) = \xi(y) - \pi(y, x)\xi(x)$$

pour λ-presque tout (y, x) dans $\mathcal{R}$. Pour une telle section ξ, on notera $c_\pi(\xi)$ le π-cobord qu'elle définit.

Définition 2.7. On dit que deux π-cocycles sont équivalents s'ils sont égaux $[\lambda]$-presque partout, et on note $Z^1((\mathcal{R},[\lambda]),(\mathcal{H},\pi))$ l'ensemble des classes d'équivalence de π-cocycles de la relation d'équivalence mesurée $(\mathcal{R},[\lambda])$. On note de plus $B^1((\mathcal{R},[\lambda]),(\mathcal{H},\pi))$ l'ensemble des classes d'équivalence de π-cobords, ainsi que

$$H^1((\mathcal{R},[\lambda]),(\mathcal{H},\pi)) = Z^1((\mathcal{R},[\lambda]),(\mathcal{H},\pi))\big/B^1((\mathcal{R},[\lambda]),(\mathcal{H},\pi))$$

le **premier groupe de cohomologie** de $(\mathcal{R},[\lambda])$ par rapport à la représentation $(\mathcal{H},\pi)$.

2.2. **Propriété (T) pour les relations d'équivalence.**

Dans ce paragraphe on énonce et on prouve un lemme préliminaire, puis l'on donne la définition de sections invariantes et presque-invariantes, qui permettent de définir la propriété (T) pour une relation d'équivalence.

Lemme 2.8. *Soit $(\mathcal{H},\pi)$ une représentation unitaire de $\mathcal{R}$, et soit ν une mesure de probabilité sur $\mathcal{R}$, dans la classe de λ. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\xi \in S_1(X,\mu,\mathcal{H})$ telle que $\nu(\|c_\pi(\xi)\| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon$

(2) Il existe une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S_1(X,\mu,\mathcal{H})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_\pi(\xi_n) = 0$ ν-presque partout.

(3) Il existe une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S_1(X,\mu,\mathcal{H})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|c_\pi(\xi_n)\| = 0$ dans $L^\infty(\mathcal{R})$ muni de la topologie faible $*$.

Démonstration. Commençons par prouver $(1) \Rightarrow (2)$. Pour cela, il suffit de se rappeler de la propriété selon laquelle si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers une fonction f, alors elle converge presque partout le long d'une sous-suite. On a redonné une démonstration de ce fait dans la preuve de la proposition 1.11.
On applique alors cette propriété à la suite de fonctions $\{\, c_\pi(\xi_n) : (\mathcal{R},\nu) \to \mathcal{H} \mid n \in \mathbb{N}\}$ convergeant vers 0 en mesure, obtenue en prenant $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ dans l'énoncé du lemme, pour avoir l'implication voulue.

Prouvons maintenant $(2) \Rightarrow (1)$. Redémontrons pour cela que la convergence presque partout implique la convergence en mesure.
Considérons $\{\, f_n : (E,\mu) \to (F,\|\cdot\|) \mid n \in \mathbb{N}\}$, une suite de fonctions convergeant presque partout vers une fonction f, et soit $\varepsilon > 0$. Écrivons que $\mu(\{\, x\,, \|f_n(x) - f(x)\| > \epsilon\,\}) = \int \mathbb{1}_{\{\|f_n(x)-f(x)\|>\epsilon\}} d\mu$. Alors comme l'intégrande est majorée par 1 en valeur absolue et converge vers 0, par convergence dominée de Lebesgue (car μ est une mesure de probabilité), $\mu(\{\, x\,, \|f_n(x) - f(x)\| > \varepsilon\,\}) \to 0$, c'est la convergence voulue. On choisit alors pour un $\varepsilon > 0$ donné un ξ_n tel que la condition (1) soit vérifiée, et cette existence est assurée par la convergence en mesure.

Reste maintenant à établir l'équivalence entre (1,2) et (3). Établissons tout d'abord $(2) \Rightarrow (3)$. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \|c_\pi(\xi_n)\|$ la fonction qui à $(y,x) \in \mathcal{R}$ associe $\|c_\pi(\xi_n)(y,x)\|_{\mathcal{H}}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N} : \xi_n \in S_1(X,\mu,\mathcal{H})$, on a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(\mathcal{R}) = (L^1(\mathcal{R}))^*$. Alors, par convergence dominée, si g est une fonction de $L^1(\mathcal{R})$, on a $\int_{\mathcal{R}} g f_n d\nu \to \int_{\mathcal{R}} g f d\nu = 0$. On a donc bien la convergence voulue.
Réciproquement, montrons que $(3) \Rightarrow (1)$. on dispose, pour toute fonction $g \in L^1(\mathcal{R})$ de la convergence $\int_{\mathcal{R}} g f_n d\nu \to 0$. Prenons alors $g = 1$ et utilisons l'inégalité de Markov pour obtenir $\varepsilon\nu(f_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \int_{\mathcal{R}} f_n d\nu$. Pour n assez grand on obtient bien (1), ce qui conclue la preuve.

$\diamondsuit$

Définition 2.9. Soit $(\mathcal{H},\pi)$ une représentation unitaire de $(\mathcal{R},[\lambda])$.

(1) Une section ξ de $\mathcal{H}$ est dite **π-invariante** si $\xi \circ r = \pi(y,x)\xi \circ s$ pour λ-presque tout $(y,x) \in \mathcal{R}$, *i.e.* si le diagramme suivant commute pour λ-presque tout $(y,x) \in \mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"'] & X \arrow[r, "\xi"] & \mathcal{H}_x \arrow[d, "\pi(y,x)"] \\ X \arrow[rr, "\xi"] & & \mathcal{H}_y \end{tikzcd}$$

Les applications r et s désignent ici les projections à gauche et à droite d'un élément de $\mathcal{R}$, respectivement.

(2) S'il existe une section unité π-invariante, on dit que la représentation $(\mathcal{H}, \pi)$ contient une **section unité invariante**.

(3) On dit que $(\mathcal{H}, \pi)$ contient des **sections unité presque-invariantes** si les conditions équivalentes du lemme précédent sont vérifiées.

Définition 2.10. On dit que $(\mathcal{R}, [\lambda])$ a la **propriété** (T) si toute représentation de $(\mathcal{R}, [\lambda])$ qui contient des sections unités presque-invariantes contient des sections unités invariantes.

2.3. **Définition des groupoïdes mesurés.**

Dans ce paragraphe on donne tous les outils nécessaires, en plus de ceux déjà présentés, pour définir la notion de groupoïde mesuré. On pourra voir cette construction comme une généralisation des relations d'équivalence mesurées, et ainsi le théorème de désintégration joue ici encore un rôle central. On fera aussi entrer en jeu la notion d'ergodicité, centrale dans notre étude. On s'inspirera largement de [Ana03] et [Hah78].

Notation 2.11. Si λ est une mesure sur G, pour E un Borélien de G on note $\lambda^{-1}(\mathsf{E}) = \lambda(\mathsf{E}^{-1})$, où $\mathsf{E}^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in \mathsf{E}\}$.

Notation 2.12. Soit $\{\lambda^a\}_{a \in \mathsf{G}^0}$ un système Borélien de mesures sur G fibré au dessus de G^0 par r. On note $g\lambda^{s(g)}$ pour $g \in \mathsf{G}$ la mesure sur G définie par

$$\forall f : \mathsf{G} \to \mathbb{R}_+ : \int_{\mathsf{G}} f d g\lambda^{s(g)} = \int_{\mathsf{G}} f(gg') d\lambda^{s(g)}(g').$$

Le second terme de l'égalité est bien défini, car on se rappelle que $\lambda^{s(g)}$ se concentre sur $r^{-1}(s(g))$, donc $r(g') = s(g)$ et la composition a bien du sens là où la mesure est portée.

Définition 2.13. On dit qu'une mesure sur G est **symétrique** si $\lambda \sim \lambda^{-1}$. On dit de plus qu'une classe de mesure $[\lambda]$ est **symétrique** si elle contient une mesure symétrique.

Définition 2.14. Soient $[\lambda]$ une classe de mesure sur G et μ une mesure sur G^0. Soit de plus $\nu \in [\lambda]$ une mesure de probabilité dont la μ-désintégration fibre à fibre par $r : \mathsf{G} \to \mathsf{G}^0$ est $\{\nu^a\}_{a \in \mathsf{G}^0}$. On dit que le système $\{\nu^a\}_{a \in \mathsf{G}^0}$ est **quasi-invariant** s'il existe un ensemble de μ-mesure pleine $\mathsf{G}^0_1 \subseteq \mathsf{G}^0$ tel que, si $r(g)$ et $s(g)$ appartiennent à G^0_1, alors $g\nu^{s(g)} \sim \nu^{r(g)}$.
On dit enfin que $[\lambda]$ est **invariante** si elle contient une mesure de probabilité dont la μ-désintégration forme un système quasi-invariant.

Remarque 2.15. Intuitivement, les définitions de mesures symétriques et de systèmes de mesures quasi-invariants décrivent le fait que la mesure sur G respecte les opérations *inverse* et *composition* du groupoïde, respectivement, le tout à mesure nulle près.

Définition 2.16. Le couple (G, λ) est appelé **groupoïde mesuré** lorsque $[\lambda]$ est symétrique et invariante. On le notera plutôt $(\mathsf{G}, [\lambda])$, les propriété demandées ne dépendant que de la classe de la mesure.

Notation 2.17. Soit $(\mathsf{G}, [\lambda])$ un groupoïde mesuré. Pour ν une mesure de probabilité dans $[\lambda]$, on note $r_*\nu$ la mesure image, définie par $\forall\, A$ Borélien de G^0 : $r_*\nu(A) = \nu(r^{-1}(A))$. On notera alors $[r_*\nu]$ la classe de cette mesure.
On se rappelle, (voir la remarque 2.3), que si la mesure λ (ou ν) sur G respecte une μ-désintégration par r, où μ est une mesure sur G^0, alors les mesures $r_*\lambda$ et μ sont équivalentes.

Introduisons maintenant la notion d'ergodicité, ainsi qu'une propriété classique vérifiée par les groupoïdes ergodiques, qui nous sera très utile par la suite.

Définition 2.18. Soient $(\mathsf{G}, [\lambda])$ un groupoïde mesuré et ν une mesure de probabilité dans $[\lambda]$. On dit que $(\mathsf{G}, [\lambda])$ est **ergodique** lorsque tout Borélien A de G^0 invariant au sens de la définition 1.14 est de mesure 0 ou 1 pour la mesure $r_*\nu$.

La définition précédente, bien que naturelle, ne semble pas très satisfaisante car l'invariance demandée sur l'ensemble A est très rigide. La proposition suivante établit des équivalences rendant cette notion plus manipulable. La preuve est celle de [Ram71].

Proposition 2.19. *Soient* $(\mathsf{G}, [\lambda])$ *un groupoïde mesuré et* ν *une mesure de probabilité dans* $[\lambda]$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) $(G, [\lambda])$ *est ergodique.*

(2) Tout Borélien $A \subseteq G^0$ *tel que* $\nu(r^{-1}(A) \Delta s^{-1}(A)) = 0$ *est de* μ*-mesure nulle ou pleine, où* Δ *désigne ici la différence symétrique.*

(3) Toute fonction Borélienne $f : G^0 \to \mathbb{C}$ *telle que* λ*-presque partout on ait* $f \circ r = f \circ s$ *est constante* μ*-presque partout.*

Démonstration. Commençons par établir *(3)* $\Rightarrow$ *(1)*. Soit A un Borélien de G^0 tel que $A = [A]$. On choisit $f = \mathbb{1}_A$. Par invariance de A on a λ-presque partout $f \circ s = f \circ r$, donc par hypothèse f est constante μ-presque partout, de valeur 0 ou 1. Cela signifie exactement que A est de mesure nulle ou pleine.

Prouvons désormais que *(2)* $\Rightarrow$ *(3)*. Soit $f : G^0 \to \mathbb{C}$ Borélienne telle que $f \circ r = f \circ s$ λ-presque partout. Soit de plus B une boule fermée de $\mathbb{C}$, et posons $A = f^{-1}(B)$. Par hypothèse sur f on a $\nu(r^{-1}(A) \Delta s^{-1}(A)) = 0$ et alors $f^{-1}(B)$ est de μ-mesure nulle ou pleine. Or on peut écrire

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0, n)$$

où $B(0, n)$ désigne la boule fermée de rayon n et de centre 0. Alors, comme elles sont en nombre dénombrable, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{-1}(B(0, n))$ soit de μ-mesure pleine. En recouvrant cette boule par un nombre dénombrable de fermés et en utilisant le même argument, puis en itérant cette construction, le théorème des fermés emboîtés nous assure qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f^{-1}(\{c\})$ soit de μ-mesure pleine. Donc f est bien constante μ-presque partout.

Terminons la preuve en établissant *(1)* $\Rightarrow$ *(2)*, qui demande plus de travail. Soit A un Borélien de G^0 tel que $\nu(r^{-1}(A) \Delta s^{-1}(A)) = 0$. Soit $G^0_1 \subseteq G^0$ l'ensemble défini comme dans la définition 2.14. On remarque que $A \cap G^0_1$ vérifie la même condition que A, donc quitte à remplacer A par $A \cap G^0_1$, on peut supposer que $A \subseteq G^0_1$. Posons alors

$$A_1 = \{ a \in G^0_1 \mid s_* \nu^a(A) = \nu^a(s^{-1}(A)) = 1 \},$$

qui est un ensemble Borélien. Si a et a' sont deux éléments de G^0_1 tels qu'il existe $g \in G$ avec $r(g) = a'$ et $s(g) = a$, on a $g\nu^a \sim \nu^{a'}$, et donc $s_*\nu^a \sim s_*\nu^{a'}$. En effet si B est un Borélien de G^0,

$$\begin{aligned} g\nu^a(s^{-1}(B)) &= \int_G \mathbb{1}_{s^{-1}(B)}(gg') d\nu^{a'}(g') \\ &= \int_G \mathbb{1}_{s^{-1}(B)}(g') d\nu^{a'}(g') \\ &= \nu^a(s^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Ainsi, si $a \in A_1$, on a $[\{a\}] \cap G^0_1 \subseteq A_1$, et donc $[A_1] \setminus A_1 \subseteq G^0 \setminus G^0_1$, car en effet si un élément est dans la saturation de A_1 sans être dans A_1, il ne peut pas être dans G^0_1. Cela nous dit, comme $G^0 \setminus G^0_1$ est de mesure nulle, que $\mu([A_1] \Delta A_1) = 0$.
Interprétons maintenant notre hypothèse. On a

$$\begin{aligned} & \nu(r^{-1}(A) \Delta s^{-1}(A)) = 0 \\ \Rightarrow\ & \nu^a(r^{-1}(A) \Delta s^{-1}(A)) = 0 \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } a \\ \Rightarrow\ & \nu^a(r^{-1}(A)) = \nu^a(s^{-1}(A)) \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } a, \end{aligned}$$

et alors l'alternative suivante s'offre à nous :

- Pour μ-presque tout $a \in A$, $r^{-1}(a) \subseteq r^{-1}(A)$ et donc $\nu^a(r^{-1}(A)) = \nu^a(s^{-1}(A)) = 1$.
- Pour μ-presque tout $a \in G^0 \setminus A$, $r^{-1}(a) \cap r^{-1}(A) = \varnothing$ et donc $\nu^a(r^{-1}(A)) = \nu^a(s^{-1}(A)) = 0$.

Cela signifie exactement que A est très proche de A_1 en mesure, *i.e.* $\mu(A_1 \Delta A) = 0$. Or par ce qui précède, A_1 était lui-même très proche de $[A_1]$ en mesure, et donc on a $\mu([A_1] \Delta A) = 0$. Or par hypothèse, $[A_1]$ est de μ-mesure nulle ou pleine, et donc A aussi, ce qui conclut la preuve.

$\diamondsuit$

Maintenant que nous avons défini les groupoïdes mesurés et ergodiques, donnons quelques définitions de plus pour introduire les notions de G-espace mesuré et de paire ergodique de G-espaces préservant la mesure, qui nous serviront pour la suite. On commence par la notion de système de Haar.

Définition 2.20. On appelle **système de Haar** sur G un système Borélien de mesures $\{\lambda^a\}_{a \in G^0}$ propre et tel que $g\lambda^{s(g)} = \lambda^{r(g)}$ pour tout $g \in G$.

Remarque 2.21. On remarque que l'on dispose ici d'une égalité entre les mesures, et non d'une équivalence comme c'était le cas dans la définition 2.14. Cette notion est à rapprocher de celle d'action pmp.

Définition 2.22. Soient un groupoïde (G, λ) muni d'un système de Haar, et μ une mesure sur G^0. On dit que la mesure μ est **quasi-invariante** par rapport à λ si la mesure

$$\mu \circ \lambda : (f : G \to \mathbb{R}_+) \mapsto \int_G f(g) d\lambda^a(g) d\mu(a)$$

est symétrique sous l'inversion $g \mapsto g^{-1}$. En particulier on remarque que $(G, [\mu \circ \lambda])$, où μ est quasi-invariante par rapport à λ, est un groupoïde mesuré.

Lemme 2.23. *Soient* $X \rtimes G$ *le groupoïde produit semi-direct associé à un* G*-espace* X*, et* $\{\lambda^a\}_{a \in G^0}$ *un système de Haar de* G*. La famille* $\{\delta_x \times \lambda^{p(x)}\}_{x \in X}$ *définit un système de Haar de* $X \rtimes G$*.*

Démonstration. La preuve ne nécessite pas d'idée originale ni même de calculs techniques, mais consiste juste en une bonne compréhension des notions en jeu, et de quelques jeux d'écriture. Elle est ici détaillée pour s'assurer que les objets aient bien été définis les uns par rapport aux autres.

Montrons tout d'abord que $\{\delta_x \times \lambda^{p(x)}\}_{x \in X}$ est propre. Commençons par réécrire l'hypothèse selon laquelle $\{\lambda^a\}_{a \in G^0}$ est propre :

$$\text{il existe une fonction } f : G \to \mathbb{R}_+ , \forall\, a \in G^0 : \int_G f d\lambda^a = 1.$$

Considérons alors la fonction $\mathbb{1} \times f : X \rtimes G \to \mathbb{R}_+$, où $\mathbb{1}$ désigne la fonction constante sur X et égale à 1. On a

$$\int_{X \rtimes G} \mathbb{1} \times f \; d(\delta_x \times \lambda^{p(x)}) = 1,$$

car en effet pour $a = p(x)$, $\lambda^{p(x)}$ se concentre sur $r^{-1}(p(x))$, et si $(x, g) \in X \rtimes G$ alors par définition $p(x) = r(g)$, *i.e.* g parcourt exactement $r^{-1}(p(x))$ et les intégrales ont le même support. La fonction $\mathbb{1} \times f$ rend donc bien le système considéré propre.

Montrons désormais pour conclure la preuve que le système $\{\delta_x \times \lambda^{p(x)}\}_{x \in X}$ vérifie $\forall\, (x, g) \in X \rtimes G$: $(x, g)(\delta_{g^{-1}x} \times \lambda^{p(g^{-1}x)}) = \delta_x \times \lambda^{p(x)}$. Commençons encore une fois par réécrire l'hypothèse selon laquelle $\{\lambda^a\}_{a \in G^0}$ forme un système de Haar : $\forall\, g \in G : g\lambda^{s(g)} = \lambda^{r(g)}$. Calculons alors pour $f : X \rtimes G \to \mathbb{R}_+$ et $(x, g) \in X \rtimes G$ fixés

$$\begin{aligned} &\int_{X \rtimes G} f d(x, g)(\delta_{g^{-1}x} \times \lambda^{p(g^{-1}x)}) \\ =&\int_{X \rtimes G} f((x, g)(x', g')) d(\delta_{g^{-1}x} \times \lambda^{p(g^{-1}x)})(x', g') \end{aligned}$$

(Cette dernière intégrale a bien un sens car tout le poids sur X est porté par $g^{-1}x$ et alors $s(x, g) = g^{-1}x = x' = r(x', g')$.)

$$\begin{aligned} =&\int_{\{g' | r(g') = p(g^{-1}x)\}} f(x, gg') d\lambda^{p(g^{-1}x)}(g') \\ =&\int_G f(x, gg') d\lambda^{p(g^{-1}x)}(g') \\ =&\int_G f(x, g') d\lambda^{p(x)}(g') \\ =&\int_{X \rtimes G} f d(\delta_x \times \lambda^{p(x)}). \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité résultant de l'hypothèse sur le système $\{\lambda^a\}_{a \in G^0}$. On a donc bien montré que le système Borélien de mesures considéré est propre et préserve la *composition* du groupoïde produit semi-direct, c'est donc bien un système de Haar.

◇

Définition 2.24. Soient $X \rtimes G$ le groupoïde produit semi-direct associé à un G-espace X, et $\{\lambda^a\}_{a\in G^0}$ un système de Haar de G. D'après le lemme précédent la famille $\{\,\delta_x \times \lambda^{p(x)}\,\}_{x\in X}$ définit un système de Haar de $X \rtimes G$. Soit de plus μ une mesure sur X quasi-invariante par rapport à $\{\,\delta_x \times \lambda^{p(x)}\,\}_{x\in X}$, c'est-à-dire on le rappelle, telle que la mesure

$$\mu \circ \{\,\delta_x \times \lambda^{p(x)}\,\}_{x\in X} : (f : X \rtimes G \to \mathbb{R}_+) \mapsto \int_{X\rtimes G} f((x',g'))d(\delta_x \times \lambda^{p(x)})((x',g'))d\mu(x)$$

soit symétrique sous l'inversion $(x,g)^{-1} = (g^{-1}x, g^{-1}) \in X \rtimes G$.
Alors on dit que le couple (X,μ) est un **G-espace mesuré**. Pour simplifier les notations, on notera $\mu \circ \lambda$ la mesure ainsi définie sur $X \rtimes G$, qui est la mesure naturelle à considérer sur le groupoïde produit semi-direct.

Définition 2.25. Soit (G,λ) un groupoïde Borélien muni d'un système de Haar. Soient (X,μ) et (Y,ν) deux G-espaces mesurés, et $p : Y \to X$ une application G-équivariante. Si $\mu \sim p_*\nu$ on dit que $((Y,\nu),(X,\mu),p)$ (ou plus simplement (Y,X)) est une **paire de G-espaces**. On dit de plus que

- (Y,X) est une **paire ergodique de G-espaces** si les deux G-espaces (X,μ) et (Y,ν) sont ergodiques en tant que groupoïdes produit semi-direct.
- (Y,X) est une **paire de G-espaces préservant la mesure** si la μ-désintégration de ν par p, $\{\nu^x\}_{x\in X}$, est un système Borélien de mesures de probabilité pour p respectant la structure de G-espace, *i.e.* si $g\nu^x = \nu^{gx}$ dès que $s(g) = p_X(x)$.
  Ici, comme dans la notation 2.12 la mesure $g\nu^x$ est définie sur Y par
  $$\forall\, f : Y \to \mathbb{R}_+ : \int_Y f dg\nu^x = \int_Y f(gy)d\nu^x(y).$$

2.4. **Représentations, cohomologie et Propriété (T) des Groupoïdes mesurés.**

L'objectif de ce paragraphe est d'étendre les notions précédemment introduites pour parler de relations d'équivalence à notre cadre nouveau ; celui des groupoïdes mesurés. La plupart de ces définitions s'adaptent sans grandes difficultés, et il semblera souvent ici que l'on répète simplement des définitions. Par souci de clarté, on a quand même choisi de toutes les énoncer. Des remarques utiles ont été rajoutées par rapport aux paragraphes sur les relations d'équivalence, notamment sur l'ergodicité.
On fixe $(G,[\lambda])$ un groupoïde mesuré.

Définition 2.26. Une **représentation unitaire** de $(G,[\lambda])$ est la donnée d'un fibré Hilbertien $\mathcal{H}$ au dessus de G^0 et d'une application $\pi : G * \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, où G est fibré au dessus de G^0 par s, telle que

(1) Pour tous $n,m \in \mathbb{N}$, l'application $g \mapsto \langle \pi(g)\xi_n(s(g)), \xi_m(r(g))\rangle_r(g)$ est Borélienne, où $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est comme dans la définition 1.7 ;
(2) Pour tout $g \in G$, l'application $\pi(g) : v \mapsto \pi(g)v$ est un isomorphisme unitaire entre $\mathcal{H}_{s(g)}$ et $\mathcal{H}_{r(g)}$;
(3) $\pi(g_2)\pi(g_1) = \pi(g_2g_1)$ lorsque $(g_2,g_1) \in G^{(2)}$.

En particulier, on a $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1}$.
On notera $(\mathcal{H},\pi)$ une telle représentation, ou simplement π lorsqu'il n'y aura pas de risques de confusion.

Remarque 2.27. On peut de manière équivalente définir la notion de représentation unitaire de $(G,[\lambda])$ par un morphisme de groupoïde entre G et le groupoïde des isomorphismes unitaires d'un fibré Hilbertien au dessus d'un ensemble. On a ici choisi de ne pas s'attarder sur ce point de vue et de décrire concrètement π.

Définition 2.28. On définit la restriction de G à $A \subseteq G^0$ comme étant $G_{|A} = s^{-1}(A) \cap r^{-1}(A)$, *i.e.* l'ensemble des éléments de G dont la *source* et la *range* sont dans A, muni des mêmes lois que G.
Si $A \subseteq G^0$ est un sous-ensemble de mesure pleine pour une mesure de $[r_*\nu]$, où ν est une mesure de probabilité dans $[\lambda]$, on appelle **réduction inessentielle** de $(G,[\lambda])$ à A la donnée de $(G_{|A}, [\lambda]_{|A})$, où $[\lambda]_{|A}$ contient les restrictions à $G_{|A}$ des mesures dans la classe $[\lambda]$.
Dans la suite quand on parlera de représentation de groupoïde mesuré, on considèrera un fibré Hilbertien $\mathcal{H}$ et une application π telle que les propriétés de la définition 2.26 soient vraies sur une réduction inessentielle de $(G,[\lambda])$.

Donnons tout de suite un lemme affirmant si l'on dispose d'une partie de mesure pleine d'un groupoïde, stable par *composition*, alors on peut se ramener à une réduction inessentielle de G incluse dans cette partie. Cela permet en pratique de se ramener à des réductions inessentielles de G sur lesquelles on s'est affranchi d'éventuels obstacles. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Lemme 2.29. (lemme 5.2 de [Ram71])
Soit H *une partie de* G *stable par composition, et telle que* H *contienne un ensemble Borélien de* $[\lambda]$*-mesure pleine. Alors il existe un ensemble* $A \subseteq G^0$ *de* $[r_*\lambda]$*-mesure pleine tel que la réduction inessentielle* $G_{|A}$ *de* G *à* A *soit incluse dans* H.

Démonstration. Posons $H_1 = H \cap \{ g \in G \mid g^{-1} \in H \}$ la "partie symétrique" de H. Alors par symétrie de la classe $[\lambda]$, H_1 contient un Borélien de $[\lambda]$-mesure pleine, que l'on notera B, et H_1 est un sous-groupoïde de G. On reprend les notations ν et $\{\nu^a\}_{a \in G^0}$ de la définition 2.14. Alors la définition du groupoïde mesuré donne l'existence d'un Borélien $A \subseteq G^0$ de $[r_*\nu]$-mesure pleine tel que

(1) $a \in A \Rightarrow \nu^a(B) = \nu^a(G) = 1$;
(2) $s(g), r(g) \in A \Rightarrow g\nu^{s(g)} \sim \nu^{r(g)}$.

Soit maintenant g dans G. Si $s(g) = a$ et $r(g) = b$ sont dans A, comme B est de $[\lambda]$-mesure pleine, et donc de ν^b-mesure pleine, alors $g(s^{-1}(b) \cap B)$ est de ν^a-mesure pleine. Alors par (1), $B \cap g(s^{-1}(b) \cap B)$ est de ν^a-mesure pleine, et en particulier non vide. Ainsi il existe g_1 et g_2 dans B tels que $g_2 = gg_1$. Donc $g = g_2^{-1} g_1 \in H_1$. Au final, $G_{|A} \subseteq H_1 \subseteq H$, ce qui conclue la preuve.

$\diamondsuit$

Remarque 2.30. Faisons dès maintenant une remarque sur les représentations de groupoïdes ergodiques. Soit $(G, [\lambda])$ un groupoïde ergodique, dont $(\mathcal{H}, \pi)$ est une représentation, pour une réduction inessentielle à $A \subseteq G^0$, et ν une mesure de probabilité dans $[\lambda]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on considère

$$B_n = \{ r(g) \in G^0 \mid g \in G_{|A} \text{ tels que les } \mathcal{H}_{r(g)} \text{ soient de dimension Hilbertienne n} \}.$$

D'après les propriétés de π, $r^{-1}(B_n) = s^{-1}(B_n)$, ce qui veut exactement dire que les B_n sont invariants, et donc par ergodicité, de ν-mesure 0 ou 1. Mais comme on ne regarde que des espaces de Hilbert séparables, ils ne peuvent pas tous être de mesure nulle.
Ainsi dans le cas de représentations de groupoïdes ergodiques, les fibres Hilbertiennes $\mathcal{H}_a$ qui interviennent sont toutes (à mesure nulle près) unitairement isomorphes entre elles, et on pourra, lorsqu'on les étudiera, se restreindre au cas où le fibré $\mathcal{H}$ est trivial de fibre $\mathcal{K}$, en vertu de la remarque 1.9.

Définition 2.31. Soient $(\mathcal{H}, \pi)$, une représentation de G. Soit alors $b : G \to \mathcal{H}$ une application Borélienne telle que pour tout $g \in G$, $b(g) \in \mathcal{H}_{r(g)}$.

(1) b est un **π-cocycle propre** si pour tout $(g_2, g_1) \in G^{(2)}$ on a
$$b(g_2 g_1) = b(g_2) + \pi(g_2) b(g_1).$$
On appelle cette égalité la relation de cocycle.
(2) b est un **π-cocycle** s'il existe une réduction inessentielle $(G_{|A}, [\lambda]_{|A})$ telle qu'en restriction à cette réduction, b soit un π-cocycle propre.

Remarque 2.32. Dans la suite, on se ramènera souvent à une réduction inessentielle de G pour pouvoir considérer qu'un π-cocycle donné est strict. On se permettra d'utiliser cette remarque librement dans les preuves, sans la mentionner.

Définition 2.33. Un π-cocycle est un **π-cobord** s'il existe une section Borélienne $\xi : G^0 \to \mathcal{H}$ telle que
$$b(g) = \xi(r(g)) - \pi(g)\xi(s(g))$$
pour λ-presque tout g dans G. Pour une telle section ξ, on notera $c_\pi(\xi)$ le π-cobord qu'elle définit.

Définition 2.34. On dit que deux π-cocycles sont équivalents s'ils sont égaux $[\lambda]$-presque partout, et on note $Z^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi))$ l'ensemble des classes d'équivalence de π-cocycles du groupoïde mesuré $(G, [\lambda])$. On note de plus $B^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi))$ l'ensemble des classes d'équivalence de π-cobords, ainsi que

$$H^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi)) = Z^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi)) \big/ B^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi))$$

le **premier groupe de cohomologie** de $(G, [\lambda])$ par rapport à la représentation $(\mathcal{H}, \pi)$.

Remarque 2.35. Observons que, par définition, le groupe $H^1((G,[\lambda]),(\mathcal{H},\pi))$ ne dépend pas d'une quelconque réduction inessentielle choisie.

Lemme 2.36. *Soit $(\mathcal{H},\pi)$ une représentation unitaire de $(G,[\lambda])$, et soit ν une mesure de probabilité sur G, dans la classe $[\lambda]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\xi \in S_1(G^0,[r_*\nu],\mathcal{H})$ telle que $\nu(\|c_\pi(\xi)\| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon$

(2) Il existe une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S_1(G^0,[r_*\nu],\mathcal{H})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_\pi(\xi_n) = 0$ ν-presque partout.

(3) Il existe une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S_1(G^0,[r_*\nu],\mathcal{H})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|c_\pi(\xi_n)\| = 0$ dans $L^\infty(G)$ muni de la topologie faible $*$.

On ne redonnera pas la preuve de ce lemme, car bien qu'énoncé de manière plus générale que précédemment, la preuve est la même, on ne s'est en effet pas servi d'une quelconque propriété spécifique aux relations d'équivalence mesurées qu'on ne saurait généraliser au cas des groupoïdes mesurés.

Définition 2.37. Soit $(\mathcal{H},\pi)$ une représentation unitaire de $(G,[\lambda])$.

(1) Une section ξ de $\mathcal{H}$ est dite **π-invariante** si $\xi\circ r = \pi(g)\xi\circ s$ pour λ-presque tout $g\in G$,*i.e.* si le diagramme suivant commute pour λ-presque tout $g \in G$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"] & G^0 \arrow[r, "\xi"] & \mathcal{H}_{s(g)} \arrow[d, "\pi(g)"] \\
G^0 \arrow[rr, "\xi"] & & \mathcal{H}_{r(g)}
\end{tikzcd}$$

(2) S'il existe une section unité π-invariante, on dit que la représentation $(\mathcal{H},\pi)$ contient une **section unité invariante**.

(3) On dit que $(\mathcal{H},\pi)$ contient des **sections unité presque-invariantes** si les conditions équivalentes du lemme précédent sont vérifiées.

Définition 2.38. On dit que $(G,[\lambda])$ a la **propriété** (T) si toute représentation de $(G,[\lambda])$ qui contient des sections unités presque-invariantes contient des sections unités invariantes.

3. Propriété (T) d'une relation d'équivalence définie par une action de groupe dénombrable

L'objectif de cette troisième partie, qui représente le cœur de ce mémoire, est d'établir le lien entre la propriété (T) d'un relation d'équivalence pmp ergodique définie par l'action d'un groupe dénombrable, et la propriété (T) de ce groupe. C'est la notion de paire ergodique de G-espaces préservant la mesure qui s'avèrera être la "bonne" notion à considérer ici. On prouvera le résultat plus fort selon lequel les propriétés (T) de deux tels G-espaces sont équivalentes, dans le cas r-discret.
Pour établir ce résultat, on commence par des résultats sur les espaces de Hilbert affine, avant d'énoncer une caractérisation de la propriété (T) en termes de groupes de cohomologie. On terminera par l'énoncé et la preuve du théorème central, ainsi que du lemme qui sert à le prouver.

3.1. Quelques résultats sur les espaces de Hilbert affines.

On va dans ce paragraphe donner des résultats sur les espaces de Hilbert affines, et sur les actions sur de tels espaces. Le lien avec les groupes de cohomologie étant très important, ces résultats, certains techniques d'autres de simples reformulations de définitions, s'avèreront inévitables pour obtenir des résultats de nature cohomologiques. On pourra consulter [HV89] pour plus de contexte concernant ces énoncés.

Définition 3.1. Un **espace de Hilbert affine** $\mathcal{K}$ (réel ou complexe) est la donnée d'un couple $(\mathcal{K}, \mathcal{K}^0)$, où $\mathcal{K}^0$ est un espace de Hilbert (réel ou complexe) agissant sur l'espace homogène $\mathcal{K}$. On dit aussi que $\mathcal{K}^0$ est l'espace des translations de $\mathcal{K}$. Le choix d'une origine 0 dans $\mathcal{K}$ fournit une identification entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^0$, et dans la suite on se servira librement de cette identification.
Un groupe topologique Γ agit de manière affine sur $\mathcal{K}$ par isométries affines. Plus précisément, on dit qu'une action affine de Γ est un morphisme de groupe $\alpha : \Gamma \to \mathtt{Iso}(\mathcal{K})$ vers le groupe des isométries affines de $\mathcal{K}$, tel que l'application suivante soit continue

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ (\gamma, \nu) & \longmapsto & \alpha(\gamma)(\nu). \end{array}$$

Définition 3.2. Soient $(\mathcal{H}, \pi)$ une représentation du groupoïde mesuré $(G, [\lambda])$, où $\mathcal{H}$ est un fibré trivial de fibre $\mathcal{K}$, et b un π-cocycle propre. On peut considérer l'**action affine associée à** b définie pour tout $g \in G$ par

$$\begin{array}{ccccc} \alpha(g) & : & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ & & \nu & \longmapsto & \alpha(g)\nu = \pi(g)\nu + b(g). \end{array}$$

Cette *version affine* d'une représentation π, associée à un π-cocycle, présente bien des avantages, et se révèle particulièrement efficace lors de son utilisation. La proposition suivante présente quelques unes des propriétés qu'elle vérifie, et pourra être utilisée librement dans la suite. La propriété *(2)* en particulier nous sera très utile pour construire des cobords, ce qui constituera l'objectif de plusieurs preuves.

Proposition 3.3. *On garde les notations de la définition précédente. On dispose des propriétés suivantes.*

(1) $\alpha(g_2 g_1) = \alpha(g_2)\alpha(g_1)$ *pour une paire composable* $(g_2, g_1) \in G^{(2)}$.

(2) Il existe une section $\xi : G^0 \to \mathcal{K}$ *est invariante par* α *(i.e.* $\xi \circ r = \alpha(g)\xi \circ s$ *pour tout* $g \in G$*) si et seulement si* b *est un* π*-cobord.*

(3) Pour tout $a \in G^0$, $\alpha(a)$ *est l'identité.*

Démonstration. Chacun de ces énoncés s'obtient par un calcul direct, faisant intervenir la relation de cocycle et les propriétés de π en tant que représentation de groupoïde. Aucune difficulté supplémentaire n'intervient, et on ne donnera pas le détail des calculs.

$\diamondsuit$

En conséquence de *(2)*, on remarque que l'on peut affirmer qu'un groupe de cohomologie $H^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi))$ est trivial si et seulement si toute action affine associée à un π-cocycle admet une section invariante. Utilisons tout de suite cette caractérisation pour faire une observation utile, sous la forme du lemme suivant.

Lemme 3.4. *Soit* $(G, [\lambda])$ *un groupoïde mesuré. On a équivalence entre*

- $H^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi)) = 0$ *pour toute représentation dans un fibré Hilbertien complexe.*
- $H^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi)) = 0$ *pour toute représentation dans un fibré Hilbertien réel.*

Démonstration. L'une des implications est triviale. Réciproquement, supposons que toute action affine associée à un π-cocycle d'une représentation réelle admette une section invariante. Considérons α une action affine associée à un π-cocycle d'une représentation complexe. Alors G agit aussi sur le fibré réel $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ sous-jacent au fibré complexe $\mathcal{H}$. Alors par hypothèse, il existe une section $\xi : G^0 \to \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ invariante par l'action. On peut également voir cette section comme à valeur dans $\mathcal{H}$, ce qui conclut la preuve.

$\diamondsuit$

Grâce au lemme précédent, on peut se ramener à l'étude des représentations dans des espaces de Hilbert réels. On va alors introduire une famille d'espace de Hilbert réels $(\mathcal{K}_t)_{t>0}$ associée à un espace de Hilbert affine $\mathcal{K}$.

Proposition 3.5. (Chapitre 4.b de [HV89])
Soit $\mathcal{K}$ *un espace de Hilbert affine réel, et soit* $t > 0$ *un réel.*

(1) Il existe une unique (à isomorphisme près) paire $(\mathcal{K}_t, \phi_t)$*, où* $\mathcal{K}_t$ *est un espace de Hilbert réel, et* $\phi_t : \nu \in \mathcal{K} \mapsto \nu_t \in \mathcal{K}_t$ *est une application continue telle que*

$$\langle \nu_t, w_t \rangle_{\mathcal{K}_t} = \exp(-t\|\nu - w\|^2_{\mathcal{K}})$$

pour tous $\nu, w \in \mathcal{K}$*, et telle que* $\mathcal{K}_t$ *soit l'espace vectoriel fermé engendré par* $\phi_t(\mathcal{K})$*. De plus, si* $\nu_1, \ldots, \nu_n$ *sont distincts dans* $\mathcal{K}$*, alors* $(\nu_1)_t, \ldots, (\nu_n)_t$ *sont linéairement indépendants dans* $\mathcal{K}_t$.

(2) Pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{K}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} \|v_n - w\|_{\mathcal{K}} = +\infty$ *pour tout* $w \in \mathcal{K}$, *la suite* $((v_n)_t)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* 0 *dans l'espace de Hilbert* $\mathcal{K}_t$.

Démonstration. (1) On choisit une origine 0 de $\mathcal{K}$ afin de l'identifier à l'espace de ses translations. Soit

$$\mathsf{EXP}(\mathcal{K}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}^{\otimes n}$$

où $\mathcal{K}^{\otimes n}$ désigne le produit tensoriel de $\mathcal{K}$ avec lui-même n fois, et la somme directe est Hilbertienne (*i.e.* vue comme complété de la somme directe algébrique pour la norme associée au produit scalaire naturel). Pour tout $v \in \mathcal{K}$ posons

$$\mathsf{EXP}(v) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} v^{\otimes n},$$

ce qui définit $\mathsf{EXP} : \mathcal{K} \to \mathsf{EXP}(\mathcal{K})$. Alors on a immédiatement

$$\langle \mathsf{EXP}(v), \mathsf{EXP}(w)\rangle_{\mathsf{EXP}(\mathcal{K})} = \exp(\langle v, w\rangle_{\mathcal{K}})$$

pour tous $v, w \in \mathcal{K}$ (car $\langle v^{\otimes n}, w^{\otimes n}\rangle_{\mathcal{K}^{\otimes n}} = \langle v, w\rangle_{\mathcal{K}}^n$). Pour $t > 0$ et $v \in \mathcal{K}$ posons maintenant

$$v_t = \exp(-t\|v\|_{\mathcal{K}}^2)\mathsf{EXP}(\sqrt{2t}v).$$

On a

$$\begin{aligned}\langle v_t, w_t\rangle_{\mathsf{EXP}(\mathcal{K})} &= \exp(-t(\|v\|_{\mathcal{K}}^2 + \|w\|_{\mathcal{K}}^2)) \exp(\langle \sqrt{2t}v, \sqrt{2t}w\rangle_{\mathcal{K}}) \\ &= \exp(-t\|v - w\|_{\mathcal{K}}^2).\end{aligned}$$

En particulier, pour tous $t > 0$ et $v \in \mathcal{K}$, v_t est un vecteur unité de $\mathsf{EXP}(\mathcal{K})$. On définit alors $\mathcal{K}_t$ comme étant le sous-espace fermé de $\mathsf{EXP}(\mathcal{K})$ engendré par les v_t, où v parcourt $\mathcal{K}$. L'application ϕ_t est bien continue.

Si les $v_1, \dots, v_n$ sont des vecteurs distincts de $\mathcal{K}$, on prouve comme dans [Gui72] que les $(v_1)_t, \dots, (v_n)_t$ (ou de manière équivalente les $\mathsf{EXP}(v_1), \dots, \mathsf{EXP}(v_n)$), sont linéairement indépendants dans $\mathsf{EXP}(\mathcal{K})$, et donc dans $\mathcal{K}_t$. Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires non nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathsf{EXP}(v_i) = 0$. Alors pour tout $w \in \mathcal{K}$, on a

$$\begin{aligned}f(w) &:= \langle \textstyle\sum \lambda_i \mathsf{EXP}(v_i), \mathsf{EXP}(w)\rangle_{\mathsf{EXP}(\mathcal{K})} \\ &= \textstyle\sum \lambda_i \exp(\langle v_i, w\rangle_{\mathcal{K}}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Si l'on considère f comme application de l'espace vectoriel réel $\mathcal{K}$ vers l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}$, la différentielle p-ième de f est donnée par

$$d^p f_w(b_1, \dots, b_p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v_i, b_1\rangle_{\mathcal{K}} \dots \langle v_i, b_p\rangle_{\mathcal{K}} \exp(\langle v_i, w\rangle_{\mathcal{K}}),$$

et est donc identiquement nulle. En particulier, pour $w = 0$, pour tout $b \in \mathcal{K}$, pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$d^p f_0(b, \dots, b) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v_i, b\rangle_{\mathcal{K}}^p = 0.$$

On a donc un système linéaire en les λ_i qui admet une solution non triviale par hypothèse, donc son déterminant, qui est un déterminant de Vandermonde, est non nul et il existe alors deux indices $i \neq j \in [\![1, n]\!]$ tels que $\langle v_i, b\rangle_{\mathcal{K}} = \langle v_j, b\rangle_{\mathcal{K}}$, *i.e;* $\langle v_i - v_j, b\rangle_{\mathcal{K}} = 0$. Comme les v_i sont distincts par hypothèse, les $v_i - v_j$ pour $i \neq j$ sont non nuls, et donc chaque $b \in \mathcal{K}$ est orthogonal à au moins l'un des $v_i - v_j, i \neq j$.

Montrons alors que ce n'est pas possible. Si b_0 est un vecteur arbitraire de $\mathcal{K}$, orthogonal à $c_1, \dots c_r$, et non orthogonal à $c_{r+1}, \dots, c_q$, alors on peut toujours trouver b_1 non orthogonal à c_1, mais assez proche de b_0 pour ne pas être orthogonal à $c_{r+1}, \dots, c_q$. De proche en proche, on obtient un vecteur de $\mathcal{K}$ non orthogonal à $c_1, \dots, c_q$. Cet argument appliqué à la famille $v_i - v_j, i \neq j$ aboutit à une contradiction, ce qui suffit à conclure sur l'indépendance des $\mathsf{EXP}(v_i)$.

Montrons maintenant l'unicité d'une telle paire $(\mathcal{K}_t, \phi_t)$. Si $(\mathcal{K}_t, \phi_t)$ et $(\mathcal{K}'_t, \phi'_t)$ sont deux paires vérifiant les conditions de l'énoncé, notons $v_t = \phi_t(v)$ et $v'_t = \phi'_t(v)$ pour $v \in \mathcal{K}$. Il ne peut exister qu'au plus un isomorphisme $U : \mathcal{K}_t \to \mathcal{K}'_t$ tel que $U(v_t) = v'_t$, par définition de $\mathcal{K}_t$. Or, on a $\langle v_t, w_t\rangle_{\mathcal{K}_t} = \exp(-t\|v - w\|_{\mathcal{K}}^2) = \langle v'_t, w'_t\rangle_{\mathcal{K}'_t}$ pour tous $v, w \in \mathcal{K}$, et on peut donc étendre $v_t \mapsto v'_t$ en un isomorphisme de $\mathcal{K}_t$ vers $\mathcal{K}'_t$.

(2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments comme décrite dans l'énoncé. Soient $\varepsilon > 0$ et $w \in \mathcal{K}_t$. Soient $m \in \mathbb{N}$, $w_1, \dots w_m \in \mathcal{K}$, et $\lambda_1, \dots \lambda_m$ des scalaires tels que

$$\left\| w - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (w_i)_t \right\|_{\mathcal{K}_t} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que les vecteurs $(v_n)_t$ soient tous unitaires (comme vu dans la preuve de *(1)*), on obtient

$$\begin{aligned}
|\langle (v_n)_t, w\rangle_{\mathcal{K}_t}| &\leqslant |\langle (v_n)_t, w - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i (w_i)_t\rangle_{\mathcal{K}_t}| + |\langle (v_n)_t, \sum_{i=1}^{m}\lambda_i (w_i)_t\rangle_{\mathcal{K}_t}| \\
&= |\langle (v_n)_t, w - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i (w_i)_t\rangle_{\mathcal{K}_t}| + \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|\, |\langle (v_n)_t, (w_i)_t\rangle_{\mathcal{K}_t}| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \exp(-t\|v_n - w_i\|_{\mathcal{K}}^2).
\end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - w_i\|_{\mathcal{K}} = +\infty$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a bien $|\langle (v_n)_t, w\rangle_{\mathcal{K}_t}| < \varepsilon$ pour n assez grand, c'est-à-dire qu'on a bien la convergence faible recherchée.

$\diamondsuit$

Finissons ce paragraphe par le lemme du centre, un lemme donnant l'existence et l'unicité du centre d'une partie bornée d'un espace métrique vérifiant l'inégalité de la médiane. C'est en particulier le cas des espaces de Hilbert.

Rappelons que si l'on se donne un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ de norme $\|\cdot\|$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) $\forall v, w \in \mathcal{K} : \exists ! m = \frac{1}{2}(v + w) \in \mathcal{K}, \|v - m\| = \|w - m\| = \frac{1}{2}\|v - w\|$. On dit que m est le milieu de $[v, w]$.

(2) Soient u, v, w trois points de $\mathcal{K}$, et m le milieu de $[v, w]$. On a alors l'inégalité suivante, appelée inégalité de la médiane

$$2\|u - m\|^2 + \frac{1}{2}\|v - w\|^2 \leqslant \|u - v\|^2 + \|u - w\|^2$$

Lemme 3.6. *Lemme du centre*
Soit $\mathcal{K}$ un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|$, et A une partie bornée non vide de $\mathcal{K}$. Pour tout $v \in \mathcal{K}$ on pose $s_A(v) = \sup_{u\in A} \|v - u\|$. Alors il existe un unique point de $\mathcal{K}$ réalisant le minimum de s_A, qu'on appelle le centre de A.
En d'autres termes, il existe une unique boule de rayon minimal parmi les boules fermées de $\mathcal{K}$ contenant A, et son centre est appelé le centre de A.

Démonstration. On pose $r = \inf_{v\in\mathcal{K}} s_A(v)$. Soient $v, w \in \mathcal{K}$, et considérons m le milieu de $[v, w]$. Pour tout $u \in A$, on a d'après l'inégalité de la médiane

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\|v - w\|^2 &\leqslant \|u - v\|^2 + \|u - w\|^2 - 2\|u - m\|^2 \\
&\leqslant s_A(v)^2 + s_A(w)^2 - 2\|u - m\|^2.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $u \in A$, et $s_A(m) = \sup_{u\in A} \|m - u\|$, on a

$$\frac{1}{2}\|v - w\|^2 \leqslant s_A(v)^2 + s_A(w)^2 - 2s_A(m)^2,$$

et donc comme $s_A(m) \geqslant r$, on a au final

$$\frac{1}{2}\|v - w\|^2 \leqslant s_A(v)^2 + s_A(w)^2 - 2r^2.$$

On peut alors choisir une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{K}$ telle que $r = \lim_{n\to\infty} s_A(v_n)$, et la dernière inégalité affirme que cette suite est une suite de Cauchy. Par construction la limite de cette suite va réaliser le minimum de s_A, et l'inégalité précédente assure également l'unicité d'un tel point.

$\diamondsuit$

3.2. **Caractérisation cohomologique de la propriété** (T).

On donne ici une condition nécessaire et suffisante pour qu'un π-cocycle soit un π-cobord dans le cas r-discret, et on se sert de cette caractérisation pour exprimer la propriété (T) en termes de groupes de cohomologie. Plus précisément, un groupoïde mesuré r-discret aura la propriété (T) si et seulement si toute représentation admet un groupe de cohomologie trivial.
On fixe ici encore $(G, [\lambda])$ un groupoïde mesuré.
On utilisera dans cette partie sans les prouver deux théorèmes de théorie descriptive des ensembles ; le théorème de sélection de Von Neumann et le théorème de Lusin-Novikov. Commençons par rappeler leurs énoncés.

Théorème 3.7. *Théorème de sélection de Von Neumann,* (théorème A.9 de [Zim84])
Soient X *un Borélien standard,* Y *un espace topologique dénombrablement engendré et* $f : X \to Y$ *une surjection Borélienne. Soit* μ *une mesure de probabilité sur* Y*. Alors il existe un ensemble de mesure pleine* $Z \subseteq Y$ *tel que* Z *soit un Borélien standard et tel qu'il existe* $g : Z \to X$ *section Borélienne de* f.

Théorème 3.8. *Théorème de Lusin-Novikov,* (théorème 18.10 de [Kec75])
Soient X *et* Y *deux Boréliens standard, et soit* $P \subseteq X \times Y$ *Borélien. Si chaque fibre* $P_x = \{ y \in Y \mid (x, y) \in P \}$ *est dénombrable, alors il existe une fonction Borélienne* $f : \mathrm{proj}_X(P) \to Y$ *telle que* $(x, f(x)) \in P$ *pour tout* $x \in \mathrm{proj}_X(P)$.
De plus P *peut s'écrire* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Graphe}(f_n)$*, où les* f_n *sont de telles fonctions.*

Le premier théorème de cette partie, qui donne une caractérisation utile du fait d'être un π-cobord, est facile dans un sens. Le sens réciproque en revanche, que l'on ne prouve que lorsque le groupoïde considéré est r-discret et ergodique, demande plus de travail, et se base sur les lemmes suivants.

Lemme 3.9. *Soit* $(\mathcal{H}, \pi)$ *une représentation de* G*, et soit* b *un* π*-cocycle. Soit* α *l'action affine associée à* b*. Supposons qu'il existe une famille* $(B(a))_{a \in G^0}$ *de sous ensembles* $B(a) \subseteq \mathcal{H}_a$ *bornés pour* $\| \cdot \|_a$*, et supposons que*

(1) $\alpha(g)B(s(g)) = B(r(g))$ *pour* λ*-presque tout* $g \in G$ *;*
(2) il existe une suite de sections Boréliennes $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *où* $\eta_n : a \mapsto \eta_n(a) \in B(a)$*, telle que pour* $r_*\nu$*-presque tout* $a \in G^0$*, l'ensemble* $\{ \eta_n(a) \mid n \in \mathbb{N} \}$ *soit dense dans* $B(a)$*.*

Alors il existe une réduction inessentielle $G_{|A}$ *et une section Borélienne* $\xi : a \in G^0 \mapsto \xi(a) \in \mathcal{H}_a$ *telle que* $\alpha(g)\xi(s(g)) = \xi(r(g))$ *pour tout* $g \in G_{|A}$.

Démonstration. On peut, d'après le lemme 2.29 et quitte à se restreindre à une réduction inessentielle, supposer que *(1)* et *(2)* sont vraies partout. Pour tout $a \in G^0$ on définit alors

$$\begin{array}{rcccl} \rho_a & : & \mathcal{H}_a & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & v & \longmapsto & \sup\limits_{w \in B(a)} \|v - w\|_a. \end{array}$$

Par densité on a

$$\rho_a(v) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|v - \eta_n(a)\|_a,$$

de sorte que $(a, v) \in G^0 {}_{\mathrm{id}}{*}_p \mathcal{H} \mapsto \rho_a(v)$ soit Borélienne, où p désigne ici l'application de fibre de $\mathcal{H}$ au dessus de G^0.
On pose alors

$$r(a) = \inf_{v \in \mathcal{H}_a} \rho_a(v)$$

et on remarque que d'après la totalité de la famille $(\xi_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ (voir 1.7), on peut écrire $r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \rho_a(\xi_n(a))$, suite à quoi on peut affirmer que $r : G^0 \to \mathbb{R}_+$ est une application Borélienne. Définissons désormais, pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$D_n = \left\{ (a, v) \in G^0 {}_{\mathrm{id}}{*}_p \mathcal{H} \;\middle|\; \rho_a(v) \leqslant r(a) + \frac{1}{n} \right\}.$$

qui est un Borélien de $G^0 {}_{\mathrm{id}}{*}_p \mathcal{H}$, car ρ_a et r sont Boréliennes. D'après le théorème de sélection de Von Neumann (théorème 3.7), quitte à se restreindre à une réduction inessentielle, il existe une section $\tilde{\xi}_n : G^0 \to D_n$, *i.e.* $\tilde{\xi}_n(a) \in D_n(a) = \{ v \in \mathcal{H} \mid (a, v) \in D_n \}$.

De la même manière que dans la preuve du lemme du Centre (lemme 3.6), on montre que $(\tilde{\xi}_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}_a$, où $a \in G^0$; il suffit en effet de considérer $B(a)$ comme sous-ensemble borné de $\mathcal{H}_a$, et alors on a bien $r(a) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \rho_a(\tilde{\xi}_n(a))$. Notons alors $\xi(a)$ la limite de cette suite, qui vérifie alors $r(a) = \rho_a(\xi(a))$. Alors $\xi(a)$ est précisément le centre de l'unique boule de rayon minimal contenant $B(a)$, et l'application $\xi : G^0 \to \mathcal{H}$ est une section Borélienne.

L'action par α étant une action par isométries affines et telle qu'elle envoie $B(s(g))$ sur $B(r(g))$, $\alpha(g) : \mathcal{H}_{s(g)} \to \mathcal{H}_{r(g)}$ envoie le centre $\xi(s(g))$ de $B(s(g))$ sur le centre $\xi(r(g))$ de $B(r(g))$, ces centres étant déterminés purement de manière métrique. On a donc bien $\alpha(g)\xi(s(g)) = \xi(r(g))$ pour tout g dans une réduction inessentielle de G.

$\diamondsuit$

Lemme 3.10. *Soit* b *un* π*-cocycle de* G*, où* $(\mathcal{H}, \pi)$ *est une représentation de* G*, et supposons que* G *soit ergodique et* r*-discret. Supposons de plus qu'il existe un sous-ensemble Borélien* $E \subseteq G^0$ *de* $r_*\lambda$*-mesure non nulle, tel que pour tout* $a \in E$*,* $\sup\{\, \|b(g)\| \mid g \in s^{-1}(E) \cap r^{-1}(\{a\})\,\} < +\infty$*. Alors il existe un* π*-cocycle* b' *tel que* $b - b'$ *soit un cobord, et tel qu'il existe un ensemble de* $r_*\lambda$*-mesure pleine* $U \subseteq G^0$ *vérifiant* $\forall\, a \in U : \sup\{\, \|b'(g)\| \mid g \in s^{-1}(U) \cap r^{-1}(\{a\})\,\} < +\infty$*.*

Démonstration. D'après la remarque 2.30, le groupoïde étant ergodique, on peut restreindre l'étude au cas où $\mathcal{H}$ est le fibré trivial de fibre $\mathcal{K}$.
On va construire une section Borélienne, et pour cela on va utiliser le théorème de Lusin-Novikov. Le théorème affirme en particulier que lorsque l'on a un Borélien A d'un espace produit $X \times Y$ dont les fibres horizontales et verticales sont dénombrables, il existe une fonction Borélienne θ définie sur $\mathrm{proj}_X(A)$ et telle que $(x, \theta(x)) \in A$ pour tout $x \in \mathrm{proj}_X(A)$.

On applique alors ce résultat à $[E]\,{}_{\mathrm{id}}{*}_s\, r^{-1}(E)$, qui est bien un Borélien de $G^0 \times G^0$, car E est un Borélien de G^0. On obtient une fonction Borélienne $\theta : [E] \to r^{-1}(E)$, et θ est bien une section de s car $(a, \theta(a)) \in [E]\,{}_{\mathrm{id}}{*}_s\, r^{-1}(E)$.
On définit alors $b_\theta : G \to \mathcal{K}$ par

$$\begin{cases} b_\theta(g) = \pi(\theta \circ r(g))^{-1} b\left((\theta \circ r(g))\, g\, (\theta \circ s(g))^{-1}\right) & \text{si } g \in G_{|[E]} \\ b_\theta(g) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la *composition* écrite a bien un sens car θ est une section de s. Comme θ est à valeur dans $r^{-1}(E)$, $s((\theta \circ s(g))^{-1}) \in E$, et donc $(\theta \circ r(g))\, g\, (\theta \circ s(g))^{-1} \in s^{-1}(E) \cap r^{-1}(\{r(\theta \circ r(g))\})$ pour tout $g \in G_{|[E]}$.
Ainsi, pour $a \in [E]$, comme $r(\theta(a)) \in E$, l'ensemble

$$\{\, b_\theta(g) \mid g \in s^{-1}([E]) \cap r^{-1}(\{a\})\,\}$$

est borné dans $\mathcal{K}$ par hypothèse. Pour $g \in G_{|[E]}$ on a de plus, d'après la relation de cocycle

$$\begin{array}{rcl} b(g) & = & b((\theta \circ r(g))^{-1} (\theta \circ r(g))\, g) \\ & = & b((\theta \circ r(g))^{-1}) + \pi(\theta \circ r(g))^{-1} b((\theta \circ r(g))\, g) \\ & = & b((\theta \circ r(g))^{-1}) + \pi(\theta \circ r(g))^{-1} b((\theta \circ r(g))\, g\, (\theta \circ s(g))^{-1} (\theta \circ s(g))) \\ & = & b((\theta \circ r(g))^{-1}) + \pi(\theta \circ r(g))^{-1}\, (\, b((\theta \circ r(g))\, g\, (\theta \circ s(g))^{-1}) \\ & & +\ \pi((\theta \circ r(g))\, g\, (\theta \circ s(g))^{-1}) b(\theta \circ s(g))\,) \\ & = & b_\theta(g) + b((\theta \circ r(g))^{-1}) + \pi(g)\pi(\theta \circ s(g))^{-1}) b(\theta \circ s(g)) \\ & = & b_\theta(g) + b((\theta \circ r(g))^{-1}) + \pi(g)\pi(\theta \circ s(g))^{-1}) b(\theta \circ s(g)) \\ & = & b_\theta(g) + b((\theta \circ r(g))^{-1}) - \pi(g) b((\theta \circ s(g))^{-1}). \end{array}$$

Alors en notant $\xi : a \in [E] \mapsto b(\theta(a)^{-1}) \in \mathcal{K}$, on a

$$b(g) = b_\theta(g) + \xi(r(g)) - \pi(g)\xi(s(g)).$$

Comme par ergodicité $[E]$ est de mesure pleine, $b - b_\theta$ est bien un π-cobord vérifiant les conditions demandées.

$\diamondsuit$

Lemme 3.11. *Soit* b *un* π*-cocycle de* G*, où* $(\mathcal{H}, \pi)$ *est une représentation de* G*, et supposons que* G *soit* r*-discret. Supposons de plus que pour tout* $a \in G^0$ *l'ensemble* $B(a) = \{\, b(g) \mid g \in r^{-1}(a)\,\}$ *soit borné dans* $\mathcal{H}_a$*. Alors* b *est un* π*-cobord.*

Démonstration. D'après la remarque 2.30, le groupoïde étant ergodique, on peut restreindre l'étude au cas où $\mathcal{H}$ est le fibré trivial de fibre $\mathcal{K}$.
On considère pour $g \in G$ l'action affine associée à b, $\alpha(g) : \nu \in \mathcal{H} \mapsto \pi(g)\nu + b(g)$. D'après la relation de π-cocycle de b, pour tout $g' \in G$ tel que $(g, g') \in G^{(2)}$, on a

$$\alpha(g)b(g') = \pi(g)b(g') + b(g) = b(gg'),$$

et donc $\alpha(g)B(s(g)) = B(r(g))$.
De plus, comme G est r-discret, on peut appliquer le théorème de Lusin-Novikov à $G^0 \ {}_{id}{*}_r \ G$, ce qui nous fournit une suite de sections $\sigma_n : G^0 \to G$ de r, telle que $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n(G^0)$. Ainsi $B(a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} b(\sigma_n(a))$, car $\sigma_n(a) \in r^{-1}(a)$, et donc toutes les hypothèses sont vérifiées et on peut appliquer le lemme 3.9.
Il existe donc une section Borélienne $\xi : G^0 \to \mathcal{H}$ telle que $\alpha(g)\xi(s(g)) = \xi(r(g))$ pour tout g dans une réduction inessentielle de G. En remplaçant $\alpha(g)$ par son expression, on obtient $\pi(g)\xi(s(g)) + b(g) = \xi(r(g))$ λ-presque partout, ce qui conclut la preuve.

$\diamondsuit$

On est désormais en mesure d'énoncer et de prouver le théorème suivant.

Théorème 3.12. *Soit* b *un* π*-cocycle, où* $(\mathcal{H}, \pi)$ *est une représentation de* $(G, [\lambda])$*. On considère les assertions suivantes.*

(1) b *est un* π*-cobord.*

(2) Il existe $E \subseteq G^0$ *Borélien, de* $r_*\lambda$*-mesure non nulle, tel que* $\sup\{ \|b(g)\|_{\mathcal{H}} \mid g \in G_{|E} \} < +\infty$.

(3) Il existe $E \subseteq G^0$ *Borélien, de* $r_*\lambda$*-mesure non nulle, tel que pour tout* $a \in E$ *on ait* $\sup\{ \|b(g)\|_{\mathcal{H}} \mid g \in s^{-1}(E) \cap r^{-1}(\{a\}) \} < +\infty$.

Alors on a (1) $\Rightarrow$ *(2)* $\Rightarrow$ *(3), et dans le cas où* G *est* r*-discret et ergodique, on a équivalence entre ces trois propositions.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ *(2).* Soit $\xi : G^0 \to \mathcal{H}$ la section telle que $b(g) = \xi(r(g)) - \pi(g)\xi(s(g))$ pour λ-presque tout $g \in G$, et soit $G_{|A}$ une réduction inessentielle de G telle que l'égalité précédente soit vraie partout. On pose $A_n = \{ a \in A \mid \|b(a)\| \leqslant n\}$, de sorte que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il existe donc un entier n_0 tel que A_{n_0} soit de $r_*\lambda$-mesure non nulle. Alors si $E = A_{n_0}$, pour $g \in G_{|E}$ on a $\|b(g\| \leqslant 2n_0$.

(2) $\Rightarrow$ *(3).* Immédiat car $G_{|E} = s^{-1}(E) \cap r^{-1}(E)$.

(3) $\Rightarrow$ *(1)* (dans le cas r-discret et ergodique). D'après le lemme 3.10, il existe un π-cocycle b' tel que $b - b'$ soit un π-cobord, et un ensemble $U \subseteq G^0$ de $r_*\lambda$-mesure pleine tel que $\forall\, a \in U$:
$\sup\{ \|b'(g)\| \mid g \in s^{-1}(U) \cap r^{-1}(\{a\}) \} < +\infty$. Par le lemme 3.11, b' est un π-cobord. Il existe donc deux sections $\xi_1, \xi_2 : G^0 \to \mathcal{H}$, telles que $b(g) = (\xi_1(r(g)) + \xi_2(r(g))) - \pi(g)\,(\xi_1(s(g)) + \xi_2(s(g)))$, ce qui conclut la preuve.

$\diamondsuit$

On dispose maintenant d'un théorème qui nous permet de "construire des π-cobords", et on va alors s'en servir pour prouver un théorème sur la caractérisation cohomologique de la propriété (T) d'un groupoïde r-discret ergodique. On se servira aussi de la famille $(\mathcal{K}_t)_{t>0}$ donnée par la proposition 3.5.

Théorème 3.13.

(1) Supposons que $(G, [\lambda])$ *soit ergodique. Si pour toute représentation* $(\mathcal{H}, \pi)$ *de* $(G, [\lambda])$ *on a* $H^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi)) = 0$*, alors* $(G, [\lambda])$ *a la propriété* (T).

(2) Supposons que $(G, [\lambda])$ *soit* r*-discret et ergodique. Si* $(G, [\lambda])$ *a la propriété* (T)*, alors pour toute représentation* $(\mathcal{H}, \pi)$ *de* $(G, [\lambda])$ *on a* $H^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi)) = 0$.

En particulier pour un groupoïde r*-discret et ergodique on a une équivalence entre les deux propriétés.*

Démonstration. (1). Soit $(\mathcal{H}, \pi)$ une représentation de $(G, [\lambda])$ admettant des sections unité presque-invariantes, et supposons par l'absurde qu'elle n'admette pas de sections invariantes non nulles. On note ν une mesure de probabilité de $[\lambda]$. Considérons l'application β définie par

$$\beta(\xi)(g) = \xi(r(g)) - \pi(g)\xi(s(g))$$

où ξ est une section de $\mathcal{H}$ et $g \in G$. Alors β est une application linéaire de $S(G^0, [r_*\nu], \mathcal{H})$ dans $B^1((G, [\lambda], (\mathcal{H}, \pi))$, et est injective par l'hypothèse que nous venons de faire. Comme elle est évidemment surjective, elle est bijective.

Établissons de plus que β est continue. Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sections qui tend vers 0 $r_*\nu$-presque partout. Alors $(\beta(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 λ-presque partout, et d'après la condition *(3)* de la proposition 1.11, $(\beta(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $S(G^0,[r_*\nu],\mathcal{H})$ muni de sa métrique. Cela prouve bien que β est continue.
Montrons désormais que $Z^1((G,[\lambda]),(\mathcal{H},\pi))$, et donc $B^1((G,[\lambda]),(\mathcal{H},\pi))$, est un sous-espace vectoriel fermé de $S(G,[\nu],\{(g,v)\in G\times\mathcal{H}\mid v\in\mathcal{H}_{r(g)}\})$, où $\{(g,v)\in G\times\mathcal{H}\mid v\in\mathcal{H}_{r(g)}\}$ est vu comme fibré Hilbertien au dessus de G. Soit alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $Z^1((G,[\lambda]),(\mathcal{H},\pi))$ convergeant vers un élément ξ de $S(G,[\nu],\{(g,v)\in G\times\mathcal{H}\mid v\in\mathcal{H}_{r(g)}\})$. On considère pour chaque b_n une réduction inessentielle A_n sur laquelle b_n est un π-cocycle propre. On obtient donc une réduction inessentielle $G_{|A'}$, où $A'=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ sur laquelle tous les π-cocycle b_n sont propres. La relation de cocycle passant à la limite et l'ensemble des g tels que $(b_n(g))_n$ converge étant stable par *composition*, on obtient que ξ est un π-cocycle propre sur la réduction inessentielle $G_{|A}$, où $A\subseteq A'$ est donné par le lemme 2.29, et donc $Z^1((G,[\lambda]),(\mathcal{H},\pi))$ est bien fermé. Ainsi, par hypothèse, $B^1((G,[\lambda],(\mathcal{H},\pi))$ est également fermé, et est donc complet en tant que fermé d'un complet (d'après la proposition 1.12).
Ainsi, β est une application linéaire bijective continue entre espaces vectoriels topologiques complètement métrisables, et donc son inverse β^{-1} est également continue, d'après [Koe69], page 166. Or, comme $(G,[\lambda])$ admet des sections unité presque-invariantes, il existe une suite de sections unité $(\xi_n)_n$ telle que ν-presque partout on ait $\lim_{n\to\infty}\beta(\xi_n)=0$, ce qui donne la contradiction voulue en passant à β^{-1}.

Considérons alors ξ une section invariante non nulle. En posant $f=\|\xi(\cdot)\|_{\mathcal{H}}$, on obtient une fonction respectant les hypothèses de la condition *(3)* d'ergodicité de la proposition 2.19, et elle est donc constante $r_*\nu$-presque partout, et non nulle par hypothèse. En divisant par cette valeur, on obtient une section unité invariante.

(2). Soit $(\mathcal{H},\pi)$ une représentation du groupoïde mesuré $(G,[\lambda])$. Ici encore, $(G,[\lambda])$ étant ergodique, on peut restreindre l'étude au cas où $\mathcal{H}$ est le fibré trivial de fibre $\mathcal{K}$. De plus, d'après le lemme 3.4, il suffit de prouver le résultat pour des représentations réelles. Soient $b:G^0\to\mathcal{K}$ un π-cocycle, et α l'action affine associée, définie on le rappelle par $\alpha(g):v\in\mathcal{K}\mapsto\pi(g)v+b(g)\in\mathcal{K}$, pour tout $g\in G$. On dénote par $\mathcal{K}_n$ la famille d'espaces de Hilbert introduite dans la proposition 3.5, avec ici $t=\frac{1}{n}$. On définit la représentation π_n par $\pi_n(g)v_n=(\alpha(g)v)_n$, où $v_n=\phi_{\frac{1}{n}}(v)$, qui est bien définie par unicité de la construction.
Commençons par établir que $(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{K}_n,\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*}\pi_n)$ admet des sections unités presque-invariantes.
Soit $v\in\mathcal{K}$. On a

$$\begin{aligned}\|\pi_n(g)v_n-v_n\|^2 &= \langle\pi_n(g)v_n-v_n,\pi_n(g)v_n-v_n\rangle_{\mathcal{K}_n}\\ &= 2-2\exp(-\tfrac{1}{n}\|v-\alpha(g)v\|^2_{\mathcal{K}})\end{aligned}$$

d'après la formule donnée dans l'assertion *(1)* de la proposition 3.5. La suite de fonctions $(\|\pi_n(\cdot)v_n-v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc ponctuellement vers 0, et ce λ-presque partout. Or d'après la caractérisation *(2)* du lemme 2.36, cela assure que la représentation construite admette des sections unité presque-invariantes, où l'on considère ici les v_n comme des sections constantes.
Alors, comme $(G,[\lambda])$ a la propriété (T), la représentation considérée admet une sections unité invariantes. Comme cette section est une section unité, en particulier au moins une de ses composantes est non nulle, et alors il existe un entier $m\in\mathbb{N}^*$ tel que la représentation π_m admette une section invariante $\eta:G^0\to\mathcal{K}_m$ non nulle.
Comme $\mathcal{K}_m$ est l'espace vectoriel fermé engendré par $\phi_{\frac{1}{m}}(\mathcal{K})$ on peut trouver une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'espace vectoriel engendré par $\phi_{\frac{1}{m}}(\mathcal{K})$ qui soit dense dans la boule unité de $\mathcal{K}_m$. On considère alors l'ensemble

$$E_{k,n}=\left\{a\in G^0:|\langle\eta(a),e_k\rangle_{\mathcal{K}_m}|\geqslant\frac{1}{n}\right\}.$$

Soit ν une mesure de probabilité dans $[\lambda]$. Si pour tous $n,k\in\mathbb{N}^*$ on avait $r_*\nu(E_{k,n})=0$, alors pour $r_*\nu$-presque tout $a\in G^0$, $\eta(a)$ serait orthogonal à tous les vecteurs de la boule unité de $\mathcal{K}_m$ par densité. Cela impliquerait que $\eta(a)$ est nul $r_*\nu$-presque partout, ce qui n'est pas possible par construction. Donc il existe un couple (k,n) d'entiers tel que $r_*\nu(E_{k,n})>0$.
Écrivons maintenant $e_k=\sum_{i=1}^{l}c_i(v_i)_m$, où les c_i sont des réels, et les v_i des vecteurs de $\mathcal{K}$. D'après ce qui précède, pour au moins l'un des v_i il existe une constante $c>0$ telle que si l'on définit

$$E=\{a\in G^0:|\langle\eta(a),(v_i)_m\rangle_{\mathcal{K}_m}|\geqslant c\},$$

on a $r_*\nu(E) > 0$. On souhaite alors appliquer le théorème 3.12, et pour cela il reste à établir que pour tout $a \in E$, $\sup\{\, \|b(g)\|_{\mathcal{K}} \mid g \in s^{-1}(E) \cap r^{-1}(\{a\})\,\} < +\infty$. Supposons donc par l'absurde qu'il existe un élément $a \in E$ et une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $s^{-1}(E) \cap r^{-1}(\{a\})$ tels que $\lim_{n\to\infty} \|b(g_n)\|_{\mathcal{K}} = +\infty$. On a donc aussi $\lim_{n\to\infty} \|\alpha(g_n)\nu\|_{\mathcal{K}} = +\infty$ pour tout $\nu \in \mathcal{K}$, et en particulier pour ν_i. Ainsi, d'après l'assertion *(2)* de la proposition 3.5, la suite $((\alpha(g_n)\nu_i)_m)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{K}_m$. En particulier on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle(\alpha(g_n)\nu_i)_m, \eta(a)\rangle_{\mathcal{K}_m} = 0.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\langle(\alpha(g_n)\nu_i)_m, \eta(a)\rangle_{\mathcal{K}_m} &= \langle\pi_m(g_n)(\nu_i)_m, \eta(a)\rangle_{\mathcal{K}_m} \\
&= \langle(\nu_i)_m, \pi_m(g_n)^{-1}\eta(a)\rangle_{\mathcal{K}_m} \\
&= \langle(\nu_i)_m, \pi_m(g_n)^{-1}\eta(r(g_n))\rangle_{\mathcal{K}_m} \\
&= \langle(\nu_i)_m, \eta(s(g_n))\rangle_{\mathcal{K}_m}
\end{aligned}$$

par invariance de η. Au final $\lim_{n\to\infty}\langle(\nu_i)_m, \eta(s(g_n))\rangle_{\mathcal{K}_m} = 0$, contredisant le fait que $|\langle\eta(s(g_n)), (\nu_i)_m\rangle_{\mathcal{K}_m}| \geqslant c$, qui est vrai car $s(g_n) \in E$. On peut donc appliquer le théorème 3.12, qui assure que b est un π-cobord. Cela conclut la preuve.

$\diamondsuit$

3.3. **Énoncé et preuve du théorème.**

On peut maintenant énoncer et prouver le théorème établissant l'équivalence de la propriété (T) de G-espaces ergodiques préservant la mesure dans le cas r-discret. On commence par le lemme clé, portant sur les groupes de cohomologie.

Lemme 3.14. *Soient* (G, λ) *un groupoïde Borélien muni d'un système de Haar et* $((Y, \nu), (X, \mu), p)$ *une paire ergodique de* G*-espaces préservant la mesure, ainsi que* Φ *l'application*

$$\begin{array}{rcccc}
\Phi & : & Y \rtimes G & \longrightarrow & X \rtimes G \\
& & (y, g) & \longrightarrow & (p(y), g).
\end{array}$$

Alors, pour toute représentation $(\mathcal{H}, \pi)$ *du groupoïde* $(X \rtimes G, [\mu \circ \lambda])$*, l'application* Φ^* *est injective, où*

$$\Phi^* \quad : \quad H^1((X \rtimes G, [\mu\circ\lambda]), (\mathcal{H}, \pi)) \quad \longrightarrow \quad H^1((Y \rtimes G, [\nu \circ \lambda]), (\mathcal{H}, \pi \circ \Phi)).$$

Démonstration. Rappelons-nous qu'on peut, d'après la remarque 2.30, supposer sans perte de généralité que la représentation $(\mathcal{H}, \pi)$ est associée au fibré Hilbertien trivial de fibre $\mathcal{K}$. La norme $\|\cdot\|$ désignera la norme de $\mathcal{K}$.

Soit $b : X \rtimes G \to \mathcal{K}$ un π-cocycle. Pour $(x, g) \in X \rtimes G$ considérons l'action affine définie par

$$\begin{array}{rcccl}
\alpha(x, g) & : & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\
& & \nu & \longmapsto & \alpha(x, g)\nu = \pi(x, g)\nu + b(x, g).
\end{array}$$

On a $\alpha(x, g_1)\alpha(g_1^{-1}x, g_2) = \alpha(x, g_1g_2)$, pour une paire composable d'éléments de $X \rtimes G$.
Comme p est G-équivariante, $b \circ \Phi$ est un $\pi \circ \Phi$-cocycle, et supposons que c'est un $\pi \circ \Phi$-cobord. On souhaite montrer que b est un π-cobord. Pour cela, la stratégie va consister à construire une section η invariante par α, *i.e.* telle que $\xi \circ r = \alpha(x, g)\xi \circ s$ pour tout $(x, g) \in X \rtimes G$, où les applications s et r sont bien entendu celles du groupoïde $X \rtimes G$, ce qui assurera que b est un π-cobord.

Dire que $b \circ \Phi$ est un $\pi \circ \Phi$-cobord signifie, quitte à se restreindre à une réduction inessentielle, qu'il existe une section $\xi : Y \to \mathcal{K}$ telle que, pour $(y, g) \in Y \rtimes G$

$$\begin{aligned}
\xi(y) &= b \circ \Phi(y, g) + \pi \circ \Phi(y, g)\xi(g^{-1}y) \\
&= b(p(y), g) + \pi(p(y), g)\xi(g^{-1}y) \qquad (1)\\
&= \alpha(p(y), g)\xi(g^{-1}y).
\end{aligned}$$

On va construire η en intégrant ξ par rapport à ν^x, où $x \in X$ et $\{\nu^x\}_{x\in X}$ est la μ-désintégration de ν par p, mais il faut d'abord s'assurer que cette intégrale sera bien définie. Considérons alors $X_1 = \{\, x \mid y \mapsto \|\xi(y)\|$ est essentiellement bornée sur $p^{-1}(x)\,\} \subseteq X$. Si x et $g^{-1}x$ sont deux éléments de X, par G-équivariance de p, $y \in p^{-1}(x)$ si et seulement si $g^{-1}(y) \in p^{-1}(g^{-1}x)$. Alors pour tout $y \in p^{-1}(x)$ on a

$$\|\xi(y)\| \leqslant \|b(x, g)\| + \|\xi(g^{-1}y)\|.$$

La norme de $b(x,g)$ ne dépendant pas de y, on en déduit que l'ensemble X_1 est invariant. Par ergodicité, X_1 est donc de μ-mesure nulle ou pleine. On va montrer par l'absurde que X_1 est de μ-mesure pleine.

Supposons donc que X_1 soit de mesure nulle. Soit $B = \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(0, R)$ une boule centrée en 0 dans $\mathcal{K}$, avec R suffisamment grand pour que l'ensemble $E = \xi^{-1}(B)$ soit de ν-mesure strictement positive. On a

$$\nu(E) = \int_X \nu^x(E)d\mu(x) > 0$$

et alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A = \{\, x \in X \mid \nu^x(E) \geqslant \varepsilon \,\}$ soit de μ-mesure strictement positive. Posons alors $E' = E \cap p^{-1}(A)$. Soit y dans la saturation $[E']$ de E', et soit $(y, g) \in Y \rtimes G$ tel que $g^{-1}y \in E'$. Soit de plus $x = p(y)$. On a par définition $g^{-1}x = p(g^{-1}y) \in A$ et

$$\xi(y) = \alpha(x,g)\xi(g^{-1}y) \, \in \alpha(x,g)(B). \tag{2}$$

Or par ergodicité, $[E'] = [E] \cap [p^{-1}(A)]$ étant invariant il est de ν-mesure pleine, car il ne peut être de mesure nulle par construction. Alors il existe $A_1 \subseteq [A]$ de μ-mesure pleine tel que $\nu^x([E']) = 1$ pour tout $x \in A_1$. En particulier, pour $x \in A_1$, pour ν^x-presque tout $y \in p^{-1}(x)$ on a

$$\xi(y) \, \in \bigcup_{\{g \mid g^{-1}x \in A\}} \alpha(x,g)(B). \tag{3}$$

En effet, à y fixé (2) est vraie pour un $g \in G$ tel que $g^{-1}y \in E'$, et cela impose que $g^{-1}x \in A$. Mais ici on regarde le problème de l'autre côté : on considère tous les g tels que $g^{-1}x \in A$, et l'un d'entre eux va convenir.

Montrons désormais que l'on aboutit à une contradiction. Pour μ-presque tout $x \in A_1$, il existe un ensemble non vide $\{\,(x, g_i) \mid i \in I_x\,\} \subseteq X \rtimes G$ maximal pour les propriétés suivantes

- $\forall\, i \in I_x$, $g_i^{-1}x \in A$
- $\forall\, i \neq j$, $\alpha(x, g_i)(B) \cap \alpha(x, g_j)(B) = \varnothing$.

En effet, il existe toujours un tel ensemble, comprenant au moins un élément, qui vérifie les conditions énoncées (par exemple $\{\,(x, p_X(x))\,\}$ convient). On va maintenant séparer l'étude en deux cas mutuellement exclusifs, le cas où I_x est fini, et le cas où il contient un ensemble dénombrable.

Soit alors un $x \in A_1$ pour lequel $I_x = [\![0, N]\!]$ est fini. Alors, pour $(x, g) \in X \rtimes G$ fixé tel que $g^{-1}x \in A$, il existe $i \in [\![0, N]\!]$ et $\nu, \nu_i \in B$ tels que $\alpha(x, g)\nu = \alpha(x, g_i)\nu_i$, c'est-à-dire, en remplaçant α par son expression, $\pi(x, g)\nu + b(x, g) = \pi(x, g_i)\nu_i + b(x, g_i)$. Pour $w \in B$ on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha(x,g)w &= \alpha(x,g)(w - \nu + \nu) \\
&= \pi(x,g)(w-\nu) + \pi(x,g)\nu + b(x,g) \\
&= \pi(x,g)(w-\nu) + \pi(x,g_i)\nu_i + b(x,g_i).
\end{aligned}$$

En passant à la norme, comme $\pi(x, g)$ est un isomorphisme unitaire, on a

$$\begin{aligned}
\|\alpha(x,g)w\| &\leqslant 3R + \|b(x,g_i)\| \\
&\leqslant 3R + \max\{\|b(x,g_i)\| \mid i \in [\![0,N]\!]\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\bigcup_{\{g \mid g^{-1}x \in A\}} \alpha(x,g)(B)$ est borné, et par (3), ξ est essentiellement borné sur $p^{-1}(x)$, et alors $x \in X_1$. Mais comme on a supposé que X_1 est de mesure nulle, les $x \in A_1$ vérifient μ-presque tous que I_x contient un ensemble dénombrable.

Soit maintenant $x \in A_1$ pour lequel $\mathbb{N} \subseteq I_x$. Posons

$$D_i = \{\, y \in p^{-1}(x) \mid \xi(y) \in \alpha(x, g_i)(B) \,\}.$$

Par hypothèse ces ensembles sont tous disjoints, et on a alors

$$1 \geqslant \nu^x(\bigcup_{\mathbb{N}} D_i) = \sum_{\mathbb{N}} \nu^x(D_i). \tag{4}$$

Mais comme α est une isométrie affine, on peut réécrire les ensembles D_i sous une autre forme. En effet, en se servant de (1) on a

$$\begin{aligned}
& \xi(g_i^{-1}y) \in B \\
\Longleftrightarrow\ & \alpha(x,g_i)\xi(g_i^{-1}y) \in \alpha(x,g_i)B \\
\Longleftrightarrow\ & \xi(y) \in \alpha(x,g_i)B
\end{aligned}$$

Donc au final on peut écrire $D_i = \{ y \in p^{-1}(x) \mid \xi(g_i^{-1}y) \in B \}$. En regardant la mesure de cet ensemble, d'après la propriété respectée par les paires de G-espaces préservant la mesure, on a

$$\begin{aligned}
\nu^x(D_i) &= \nu^x(\{ y \in Y \mid \xi(g_i^{-1}y) \in B \}) \\
&= g_i^{-1}\nu^x(\{ y \in Y \mid \xi(y) \in B \}) \\
&= g_i^{-1}\nu^x(\xi^{-1}(B)) \\
&= \nu^{g_i^{-1}x}(\xi^{-1}(B)) \\
&= \nu^{g_i^{-1}x}(E)
\end{aligned}$$

Mais comme par hypothèse sur les g_i on a $g_i^{-1}x \in A$, alors $\forall i \in \mathbb{N} : \nu^{g_i^{-1}x}(E) \geqslant \varepsilon > 0$ et alors (4) nous fournit une contradiction (car $\nu^{g_i^{-1}x}$ est une mesure de probabilité).

Au final, on a vu que l'ensemble des $x \in A_1$ tels que I_x est fini est de μ-mesure nulle, mais lorsque l'on considère un $x \in A_1$ tel que I_x contient un ensemble dénombrable, on aboutit à une contradiction, et alors de tels x ne peuvent exister. Donc A_1 est de μ-mesure nulle dans [A], mais il est aussi de μ-mesure pleine par construction. C'est la contradiction cherchée, et donc X_1 est bien de μ-mesure pleine.

Comme X_1 est de μ-mesure pleine dans X, on peut alors définir pour $x \in X_1$

$$\eta(x) = \int_Y \xi(y) d\nu^x(y),$$

car ξ est essentiellement bornée sur $p^{-1}(x)$, *i.e.* là où se concentre la mesure ν^x, par définition de X. Il est immédiat que η est une section du fibré $\mathcal{K} \times X$ au dessus de X. Concluons la preuve en montrant que η est invariante par α. On a en effet d'après (1), pour $(g, x) \in X \rtimes G$

$$\begin{aligned}
\alpha(x, g)\eta(g^{-1}x) &= \alpha(x, g)\int_Y \xi(y) d\nu^{g^{-1}x}(y) \\
&= \alpha(x, g)\int_Y \xi(y) dg^{-1}\nu^x(y) \\
&= \int_Y \alpha(x, g)\xi(g^{-1}y) d\nu^x(y) \\
&= \int_Y \xi(y) d\nu^x(y) \\
&= \eta(x).
\end{aligned}$$

Donc η est bien invariante par α, ce qui signifie que b est bien un π-cobord, ce qui prouve l'injectivité du morphisme Φ^*.

$\diamondsuit$

Théorème 3.15. *Soient* (G, λ) *un groupoïde Borélien muni d'un système de Haar, et soit* $((Y, \nu), (X, \mu), p)$ *une paire ergodique de* G*-espaces préservant la mesure.*

(1) Si le G*-espace* (X, μ) *a la propriété* (T)*, alors le* G*-espace* (Y, ν) *a aussi la propriété* (T).

(2) Si G *est* r*-discret et si le* G*-espace* (Y, ν) *a la propriété* (T)*, alors le* G*-espace* (X, μ) *a aussi la propriété* (T).

Démonstration. Prouvons *(1)*. Comme dans la preuve précédente, on peut sans perte de généralité étudier les représentations $(\mathcal{H}, \pi)$ de $(Y \rtimes G, [\nu \circ \lambda])$ dans le fibré Hilbertien trivial de fibre $\mathcal{K}$.
L'application p étant équivariante, elle définit une représentation induite de $(X \rtimes G, [\mu \circ \lambda])$ de la manière suivante. Notons $(p_*\mathcal{H})$ le fibré Hilbertien au dessus de X dont les fibres sont $(p_*\mathcal{H})_x = L^2(\nu^x) \otimes \mathcal{K}$, que l'on identifie à un sous-ensemble de $L^2(\nu^x, \mathcal{K})$ l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathcal{K}$ de carré intégrable, via $f \otimes v \mapsto (y \mapsto f(y)v)$. Pour ne pas surcharger les notations on notera la norme associée à un tel espace $\|\cdot\|_{L^2(\nu^x)}$. On définit alors la représentation $(p_*\mathcal{H}, \pi^X)$ ainsi. Si $\xi \in L^2(\nu^{g^{-1}x}) \otimes \mathcal{K}$ et $y \in p^{-1}(x)$ on a

$$(\pi^X(x, g)\xi)(y) = \pi(y, g)\xi(g^{-1}y) \tag{5}$$

de sorte que $\pi^X(x, g)$ soit un isomorphisme unitaire entre $L^2(\nu^{g^{-1}x}) \otimes \mathcal{K}$ et $L^2(\nu^x) \otimes \mathcal{K}$. Pour plus de détails sur cette construction, on pourra consulter [Ram76].

Montrons alors que si π admet des sections unité presque-invariantes, alors π^X admet aussi des sections unité presque-invariantes. Soit $\xi : Y \to \mathcal{K}$ une section unité, *i.e.* telle que $\|\xi(y)\|_{\mathcal{K}} = 1$ ν-presque partout. On pose $\hat{\xi}_x = \xi_{|p^{-1}(x)}$. On a alors

$$\|\hat{\xi}_x\|_{L^2(\nu^x)} = \int_Y \|\xi_{|p^{-1}(x)}(y)\|^2_{\mathcal{K}} d\nu^x(y) = \int_Y \|\xi(y)\|^2_{\mathcal{K}} d\nu^x(y) = 1,$$

ce qui montre bien que $\hat{\xi} : x \mapsto \hat{\xi}_x$ est une section unité du fibré Hilbertien $(p_*\mathcal{H})$. De plus, pour $y \in p^{-1}(x)$ on a

$$(\pi^X(x,g)\hat{\xi}_{g^{-1}x})(y) = \pi(y,g)\xi_{|p^{-1}(g^{-1}x)}(g^{-1}y) = \pi(y,g)\xi(g^{-1}y).$$

On a donc au final

$$\|\pi^X(x,g)\hat{\xi}_{g^{-1}x} - \hat{\xi}_x\|^2_{L^2(\nu^x)} = \int_Y \|\pi(y,g)\xi(g^{-1}y) - \xi(y)\|^2_{\mathcal{K}} d\nu^x(y).$$

Considérons maintenant une suite $(\xi_n : Y \to \mathcal{K})_{n\in\mathbb{N}}$ de sections unité telle que $\lim_{n\to\infty} \|c_\pi(\xi_n)\| = 0$ dans $L^\infty(Y \rtimes G)$ muni de la topologie faible $*$. Établissons que $\lim_{n\to\infty} \|c_{\pi^X}(\hat{\xi}_n)\| = 0$ dans $L^\infty(X \rtimes G)$ muni de la topologie faible $*$.
Soit $f : X \rtimes G \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que $\int_{X\rtimes G} f d\mu \circ \lambda = 1$. On a alors d'après l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{X\rtimes G} f(x,g)\|c_{\pi^X}(\hat{\xi})(x,g)\|_{L^2(\nu^x)} d\mu\circ\lambda(x,g)\right)^2 \\
= &\left(\int_{X\rtimes G} f(x,g)\|\pi^X(x,g)\hat{\xi}_{g^{-1}x} - \hat{\xi}_x\|_{L^2(\nu^x)} d\mu\circ\lambda(x,g)\right)^2 \\
\leqslant &\int_{X\rtimes G} f(x,g)\|\pi^X(x,g)\hat{\xi}_{g^{-1}x} - \hat{\xi}_x\|^2_{L^2(\nu^x)} d\mu\circ\lambda(x,g) \\
= &\int_{X\rtimes G} f(x,g)\left(\int_Y \|\pi(y,g)\xi(g^{-1}y) - \xi(y)\|^2_{\mathcal{K}} d\nu^x(y)\right) d\mu\circ\lambda(x,g) \\
= &\int_{X\rtimes G} f(x,g)\left(\int_Y \|c_\pi(\xi)(y,g)\|^2_{\mathcal{K}} d\nu^x(y)\right) d\mu\circ\lambda(x,g).
\end{aligned}$$

Remarquons que, d'après l'inégalité triangulaire et le fait que $\pi(y,g)$ soit une isométrie unitaire, on a $\|c_\pi(\xi)\|^2_{\mathcal{K}} \leqslant 2\|c_\pi(\xi)\|_{\mathcal{K}}$. Poursuivons alors le calcul, par le le théorème de Fubini-Tonelli et la proposition 1.27 on a

$$\begin{aligned}
&\int_{X\rtimes G} f(x,g)\left(\int_Y \|c_\pi(\xi)(y,g)\|^2_{\mathcal{K}} d\nu^x(y)\right) d\mu\circ\lambda(x,g) \\
\leqslant\ & 2\int_{X\rtimes G}\int_Y f(x,g)\|c_\pi(\xi)(y,g)\|_{\mathcal{K}} d\nu^x(y) d\mu\circ\lambda(x,g) \\
=\ & 2\int_{X\rtimes G}\int_Y f(x,g)\|c_\pi(\xi)(y,g)\|_{\mathcal{K}} d\nu^x(y) d(\delta_{x'} \times \lambda^{p_X(x')})(x,g) d\mu(x') \\
=\ & 2\int_{X\rtimes G}\int_Y f(x,g)\|c_\pi(\xi)(y,g)\|_{\mathcal{K}} d\nu^x(y) d\lambda^{p_X(x)}(g) d\mu(x) \\
=\ & 2\int_X\int_G\int_Y f(x,g)\|c_\pi(\xi)(y,g)\|_{\mathcal{K}} \mathbb{1}_{\{p_X(x)=s(g)\}} d\nu^x(y) d\lambda^{p_X(x)}(g) d\mu(x) \\
=\ & 2\int_G\int_X\int_Y f(x,g)\|c_\pi(\xi)(y,g)\|_{\mathcal{K}} \mathbb{1}_{\{p_X(x)=s(g)=a\}} d\nu^x(y) d\mu(x) d\lambda^a(g) \\
=\ & 2\int_G\int_Y f(p(y),g)\|c_\pi(\xi)(y,g)\|_{\mathcal{K}} \mathbb{1}_{\{p_X(p(y))=s(g)=a\}} d\nu(y) d\lambda^a(g)
\end{aligned}$$

(et on a bien que $p_X(p(y)) = p_Y(y)$ par G-invariance de p, donc on retombe bien sur le support voulu pour l'intégration)

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_Y \int_G f(p(y), g)\|c_\pi(\xi)(y, g)\|_{\mathcal{K}} \mathbb{1}_{\{p_Y(y))=s(g)\}} d\lambda^{p_Y(y)}(g) d\nu(y) \\
&= 2\int_{Y \rtimes G} f(p(y), g)\|c_\pi(\xi)(y, g)\|_{\mathcal{K}} d\lambda^{p_Y(y)}(g) d\nu(y) \\
&= 2\int_{Y \rtimes G} f(p(y), g)\|c_\pi(\xi)(y, g)\|_{\mathcal{K}} d(\delta'_y \times \lambda^{p_Y(y')})(y, g) d\nu(y') \\
&= 2\int_{Y \rtimes G} f(p(y), g)\|c_\pi(\xi)(y, g)\|_{\mathcal{K}} d\nu \circ \lambda(y, g).
\end{aligned}
$$

En considérant cette inégalité en les ξ_n, on a bien le résultat voulu, à savoir que $\lim_{n\to\infty} \|c_\pi^X(\hat{\xi}_n)\| = 0$ dans $L^\infty(X \rtimes G)$ muni de la topologie faible $*$. Cela montre bien que l'existence de sections unité presque-invariantes pour π implique l'existence de telles sections pour π^X.

Nous somme maintenant en mesure de prouver *(1)*. Supposons que π admette des sections unité presque-invariantes, et que $X \rtimes G$ ait la propriété (T). On veut alors montrer que π a des sections unité invariantes. D'après ce qui précède, π^X admet une section unité presque-invariante, et elle admet donc une section unité invariante $\eta : x \in X \mapsto \eta_x \in L^2(\nu^x) \otimes \mathcal{K}$ par la propriété (T). On définit alors

$$
\begin{array}{cccc}
\xi & : & Y & \longrightarrow & \mathcal{K} \\
 & & y & \longmapsto & \eta_{p(y)}(y).
\end{array}
$$

Par invariance, pour $\mu \circ \lambda$-presque tout $(x, g) \in X \rtimes G$ on a $\pi^X(x, g)\eta_{g^{-1}x} = \eta_x$, donc pour $\mu \circ \lambda$-presque tout $(x, g) \in X \rtimes G$, pour ν^x-presque tout $y \in p^{-1}(x)$ en se servant de l'expression (5) on a

$$
\pi(y, g)\xi(g^{-1}y) = \pi(y, g)\eta_{p(g^{-1}y)}(g^{-1}y) = \eta_{p(y)}(y) = \xi(y).
$$

De la même manière que dans le calcul visant à établir l'existence de sections unité presque-invariantes pour π^X, on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour établir cette égalité $\nu \circ \lambda$-presque partout, on a en effet

$$
\begin{aligned}
&\int_{X \rtimes G} f(x, g) \left(\int_Y \|\pi(y, g)\xi(g^{-1}y) - \xi(y)\|_{\mathcal{K}} d\nu^x(y) \right) d\mu \circ \lambda(x, g) \\
= &\int_{Y \rtimes G} f(p(y), g) \, \|\pi(y, g)\xi(g^{-1}y) - \xi(y)\|_{\mathcal{K}} d\nu \circ \lambda(y, g).
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\pi(y, g)\xi(g^{-1}y) = \xi(y) \tag{6}
$$

pour $\nu \circ \lambda$-presque tout $(y, g) \in Y \rtimes G$. On a donc montré que ξ était invariante, il ne reste qu'à établir que c'est une section unité pour conclure. Cela va découler de l'ergodicité et du fait que η soit une section unité.

Comme η est une section unité du fibré $(p_*\mathcal{H})$, on a

$$
\|\eta_x\|^2_{L^2(\nu^x)\otimes(K)} = \int_Y \|\eta_x(y)\|^2_{\mathcal{K}} d\nu^x(y) = 1
$$

pour μ-presque tout $x \in X$, et donc on a

$$
\|\eta_x\|^2_{L^2(\nu^x)\otimes(K)} = \int_Y \|\eta_{p(y)}(y)\|^2_{\mathcal{K}} d\nu^x(y) = \int_Y \|\xi(y)\|^2_{\mathcal{K}} d\nu^x(y) = 1 \tag{7}
$$

pour ν-presque tout $y \in Y$.

Concluons maintenant comme dans la preuve de l'assertion *(1)* du théorème 3.13, en remarquant que $f = \|\xi(\cdot)\|_{\mathcal{K}}$ vérifie d'après (6) la condition *(3)* d'ergodicité de la proposition 2.19, et est donc constante ν-presque partout. Or d'après (7), cette constante ne peut être que 1, car ν^x est une mesure de probabilité. Donc ξ est bien une section unité invariante, ce qui conclut la preuve de *(1)*.

Pour prouver *(2)*, on va utiliser le lemme précédent, ainsi que la caractérisation donnée par le théorème 3.13. Par hypothèse le G-espace (Y, ν) a la propriété (T), donc tous ses groupes de cohomologie H^1

sont nuls. Alors, par le lemme précédent, tout groupe de cohomologie H^1 du G-espace (X, μ) est nul, car s'injecte dans le groupe nul. Alors le G-espace (X, μ) a la propriété (T)

$\diamondsuit$

En particulier, si on considère Γ un groupe dénombrable et que l'on applique le résultat précédent au Γ-espace (X, μ), où X est réduit à un seul élément, ce qui revient à considérer le groupe lui-même, on obtient le corollaire suivant. On s'intéresse particulièrement au cas de l'exemple 1.19, qui nous permet de relier des informations sur le groupe en question aux informations sur la relation d'équivalence que son action induit.

Corollaire 3.16. *Soit Γ un groupe dénombrable agissant de manière pmp sur (Y, ν) un Γ-espace ergodique muni d'une mesure de probabilité. Alors Γ a la propriété (T) si et seulement si (Y, ν) a la propriété (T). En particulier si on dispose d'une action libre, ergodique et pmp de Γ sur (Y, ν) un espace de probabilité standard, alors Γ a la propriété (T) si et seulement si la relation d'équivalence $\mathcal{R} = \{ (y, \gamma y) \mid y \in \mathsf{Y}, \gamma \in \Gamma \}$ a la propriété (T).*

4. Extension au cas localement compact

Les résultats obtenus dans le cas de relations d'équivalence définie par des actions libres et ergodiques de groupes dénombrables sont convaincants, mais la restriction de dénombrabilité imposée n'existe que par souci technique. Ainsi dans cette dernière partie on introduit de nouveaux outils afin d'étendre ces résultats au cas des groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts.
On aura besoin pour cela de théorèmes généralisant ceux existant dans le cas dénombrable à un cadre plus général, celui des fibres σ-compactes, notion définie ci-après. On ne redonnera pas la définition d'espaces Polonais et analytiques, et les propriétés dont on se servira seront rappelées. La plupart des résultats seront invoqués sans preuve, et ici encore on pourra consulter [Kec75] pour plus de détails.
On considèrera dans toute cette partie Γ un groupe localement compact (c'est-à-dire dont la topologie est séparée, ou Hausdorff, et localement compacte) à base dénombrable d'ouverts, et λ_Γ une mesure de Haar de Γ.

Définition 4.1. Soient X un espace topologique quelconque et $A \subseteq \mathsf{X}$. On dit que A est **σ-compact** (ou K_σ) si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, où les K_n sont des compacts de X.

Théorème 4.2. *Théorème de Arsenin-Kunugui,* (théorème 18.18 de [Kec75])
Soient X un Borélien standard et Y un espace polonais, et soit $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ un Borélien. Si chaque fibre $\mathsf{P}_x = \{ y \in \mathsf{Y} \mid (x, y) \in \mathsf{P} \}$ est σ-compacte, alors il existe une fonction Borélienne $f : \mathsf{proj}_{\mathsf{X}}(\mathsf{P}) \to \mathsf{Y}$ telle que $(x, f(x)) \in \mathsf{P}$ pour tout $x \in \mathrm{proj}_{\mathsf{X}}(\mathsf{P})$.

On remarque que l'énoncé de ce théorème est moins fort en un sens que celui de Lusin-Novikov (3.8) ; on ne peut en effet pas écrire notre sous-ensemble produit comme union (et encore moins comme union dénombrable) de graphes de fonctions uniformisantes au sens de Kechris. Pour contourner ce problème et pouvoir tout de même adapter la preuve du lemme 3.11 à notre cadre, on va se servir (entre autres arguments) du fait que le groupoïde produit semi-direct en jeu est en fait Polonais, ce qui nous fournira une base dénombrable d'ouverts.
On dispose des lemmes suivants, basés sur des propriétés classiques des espaces Polonais.

Lemme 4.3. *Tout groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts est complètement métrisable, et donc Polonais.*

Lemme 4.4. *Tout ouvert d'un espace Polonais est Polonais.*

Lemme 4.5. *Le groupoïde $\mathsf{G} = \mathsf{X} \rtimes \Gamma$, où X est un espace Polonais, est Polonais pour la topologie produit. En particulier il est à base dénombrable d'ouverts.*

Pour pouvoir appliquer le théorème de Arsenin-Kunugui (4.2), il faut de plus vérifier l'hypothèse de σ-compacité des fibres. On montre en fait que tout groupoïde mesuré peut, au travers d'une réduction inessentielle, se munir d'une topologie pour laquelle il est σ-compact.

Théorème 4.6. (théorème 2.5 de [Ram82])
Soit $(\mathsf{G}, [\lambda])$ un groupoïde mesuré. Il existe une réduction inessentielle $\mathsf{G}_{|A}$ ayant une topologie σ-compacte pour laquelle c'est un groupoïde topologique, et qui définit la structure Borélienne de G.

On énonce maintenant de nouveau le théorème sur la caractérisation des π-cobords (3.12), ainsi que les lemmes permettant de le prouver (3.11 et 3.10), cette fois sans hypothèse de dénombrabilité. Pour le lemme 3.10 le théorème de Arsenin-Kunugui (4.2) suffit, alors que pour le lemme 3.11, il va falloir invoquer de nouveaux arguments.

Lemme 4.7. *Soient* $(\mathsf{G}, [\lambda])$ *un groupoïde mesuré ergodique et* $(\mathcal{H}, \pi)$ *une représentation de* G. *Supposons qu'il existe un sous-ensemble Borélien* $\mathsf{E} \subseteq \mathsf{G}^0$ *de* $r_*\lambda$*-mesure non nulle, tel que pour tout* $a \in \mathsf{E}$, $\sup\{\, \|b(g)\| \mid g \in s^{-1}(\mathsf{E}) \cap r^{-1}(\{a\})\,\} < +\infty$. *Alors il existe un* π*-cocycle* b' *tel que* $b - b'$ *soit un cobord, et tel qu'il existe un ensemble de* $r_*\lambda$*-mesure pleine* $\mathsf{U} \subseteq \mathsf{G}^0$ *vérifiant* $\forall\, a \in \mathsf{U} : \sup\{\, \|b'(g)\| \mid g \in s^{-1}(\mathsf{U}) \cap r^{-1}(\{a\})\,\} < +\infty$.

Démonstration. La preuve est strictement la même que celle du lemme 3.10 une fois que l'on a remplacé l'utilisation du théorème de Lusin-Novikov (3.8) par celle du théorème de Arsenin-Kunugui (4.2). $\diamondsuit$

Pour le lemme 3.11, simplement changer de théorème ne suffit plus. On souhaite en effet obtenir une suite de sections dont l'image est dense dans $\mathsf{B}(x)$, pour μ-presque tout $x \in \mathsf{X}$. Le théorème de Lusin-Novikov (3.8) donnait encore plus que cela, mais ici le cadre localement compact ne nous fournit pas autant de liberté. Pour pallier ce problème, on utilise un autre théorème de sélection, celui de Kuratowski-Ryll-Nardzewski. On commence par introduire la structure Borélienne d'Effros.

Notation 4.8. Pour X un espace topologique, on désignera par $\mathsf{F}(\mathsf{X})$ l'ensemble des fermés de X.

Définition 4.9. On considère la σ-algèbre sur $\mathsf{F}(\mathsf{X})$, où X est un Borélien standard, engendrée par les ensembles de la forme

$$\{\, \mathsf{F} \in \mathsf{F}(\mathsf{X}) \mid \mathsf{F} \cap \mathsf{U} \neq \varnothing \,\},$$

où U est un ouvert quelconque de X. Si on dispose en particulier d'une base dénombrable d'ouverts $(\mathsf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit de considérer les U parcourant cette base. On dit que cette σ-algèbre définit la **structure Borélienne d'Effros** de $\mathsf{F}(\mathsf{X})$, ou que $\mathsf{F}(\mathsf{X})$ muni de cette σ-algèbre est l'espace Borélien d'Effros de $\mathsf{F}(\mathsf{X})$.

On dispose du théorème suivant concernant l'espace Borélien d'Effros.

Théorème 4.10. (théorème 12.6 de [Kec75])
Si X *est un espace Polonais, alors l'espace Borélien d'Effros de* $\mathsf{F}(\mathsf{X})$ *est un Borélien standard.*

On énonce désormais le théorème de sélection de Kuratowski-Ryll-Nardzewski, qui va nous apporter la densité recherchée.

Théorème 4.11. *Kuratowski-Ryll-Nardzewski,* (théorème 12.13 de [Kec75])
Soit X *un espace Polonais. Il existe une suite de fonctions Boréliennes* $s_n : \mathsf{F}(\mathsf{X}) \to \mathsf{X}$ *telle que pour tout* F *non vide dans* $\mathsf{F}(\mathsf{X})$, $\{s_n(\mathsf{F})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est dense dans* F.

On énonce enfin un dernier théorème utile qui nous servira à obtenir la généralisation recherchée.

Théorème 4.12. *Lusin,* (théorème 21.10 de [Kec75])
Soit X *un Borélien standard. Tout ensemble analytique* $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{X}$ *est universellement mesurable, c'est-à-dire mesurable pour toute mesure de Borel* σ*-finie.*

On dispose maintenant de tous les outils nécessaires pour conclure. Dans la suite on fixe (X, μ) un Borélien standard muni d'une mesure de probabilité. Notons de plus $\lambda = \mu \circ \lambda_\Gamma$, ce qui munit $\mathsf{G} = \Gamma \ltimes \mathsf{X}$ d'une structure de groupoïde mesuré, et on suppose qu'il est ergodique.

Lemme 4.13. *Soient* $(\mathcal{H}, \pi)$ *une représentation de* G, *et* b *un* π*-cocycle. On suppose que pour tout* $x \in \mathsf{X}$ *l'ensemble* $\mathsf{B}(x) = \{\, b(g) \mid g \in r^{-1}(\{x\})\,\}$ *soit borné. Alors* b *est un* π*-cobord.*

Démonstration. On peut restreindre l'étude au cas où $\mathcal{H}$ est le fibré trivial de fibre $\mathcal{K}$.
On obtient comme dans la preuve du lemme 3.11 que $\alpha(g)\mathsf{B}(s(g)) = \mathsf{B}(r(g))$ pour tout $g \in \mathsf{G}$, où α désigne ici encore l'action affine associée à b.

Pour appliquer le théorème 4.11 à l'espace de Hilbert $\mathcal{K}$, qui est bien Polonais, on se ramène à l'étude de $\mathsf{F}(\mathcal{K})$ en considérant la famille $\{\overline{\mathsf{B}(x)}\}_{x\in\mathsf{X}} \subseteq \mathsf{F}(\mathcal{K})$ des adhérences des $\mathsf{B}(x)$. On remarque que dans le lemme 3.9 on peut remplacer la condition *(2)* par la densité dans $\overline{\mathsf{B}(x)}$ plutôt que dans $\mathsf{B}(x)$ sans poser de problèmes, et si pour tout $x \in \mathsf{X}$ l'ensemble $\mathsf{B}(x)$ est borné, alors $\overline{\mathsf{B}(x)}$ l'est aussi. Ainsi le passage aux adhérences se fait sans heurts et on peut se ramener à rechercher une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour presque tout $x \in X$ l'ensemble $\{\eta_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\overline{B(x)}$.

On peut alors pour $x \in X$ appliquer le théorème de Kuratowski-Ryll-Nardezewski (4.11) à $\overline{B(x)}$, ce qui nous assure qu'il existe une suite d'applications Boréliennes $s_n : F(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$ telle que $\{s_n(\overline{B(x)}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\overline{B(x)}$. Il reste pour conclure à montrer que $\overline{B} : x \mapsto \overline{B(x)}$ est Boréliennes pour la structure Borélienne d'Effros. On va en fait montrer que pour tout $U \subseteq \mathcal{K}$ ouvert l'ensemble

$$E_{U,x} = \{x \in X \mid \overline{B(x)} \cap U \neq \varnothing\}$$

est un Borélien de X, ce qui suffira d'après la définition de la structure Borélienne d'Effros.

Fixons U un ouvert de $\mathcal{K}$. Comme b est Borélienne, l'ensemble

$$\{(x, g) \in X\,_{\mathrm{id}}*_r G \mid b(g) \in U\}$$

est Borélien. Ainsi, $E_{U,x}$, qui est l'image de cet ensemble par la projection sur la coordonnée de gauche est un ensemble analytique, et donc Lebesgue-mesurable d'après le théorème de Lusin (4.12).
Ainsi $\overline{B}$ est une application Lebesgue-mesurable, et il reste alors à montrer qu'il existe un ensemble de mesure pleine tel qu'en restriction à cet ensemble, $\overline{B}$ soit Borélienne.
Comme $F(\mathcal{K})$ est un Borélien standard d'après le théorème 4.10, on peut en exhiber une base dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\overline{B}$ est Lebesgue-mesurable, pour tout n il existe deux sous-ensembles Boréliens X_n et X'_n, sous-ensembles de X, tels que

$$\begin{cases} X_n \subseteq \overline{B}^{\,-1}(U_n) \subseteq X'_n \\ \mu(X'_n \setminus X_n) = 0. \end{cases}$$

En particulier,

$$\overline{B}^{\,-1}(U_n) \cap (X \setminus (X'_n \setminus X_n)) = \overline{B}^{\,-1}(U_n) \cap X_n = X_n$$

est Borélien, et donc on peut considérer

$$\widetilde{X} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus (X'_n \setminus X_n),$$

qui est de μ-mesure pleine car chaque $X \setminus (X'_n \setminus X_n)$ l'est. En restriction à $\widetilde{X}$, l'image réciproque de chaque ouvert de la base $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\overline{B}$ est un Borélien, ce qui signifie exactement que l'on a construit un ensemble de mesure pleine en restriction auquel $\overline{B}$ est Borélienne.
On peut donc considérer la réduction inessentielle de G à cet ensemble, et alors la composition $s_n \circ \overline{B}$ est Borélienne. On a donc trouvé une suite de sections Boréliennes $(\eta_n = s_n \circ \overline{B})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour μ-presque tout x dans X, l'ensemble $\{s_n \circ \overline{B}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\overline{B(x)}$.

Toutes les hypothèses étant vérifiées, on peut alors appliquer le lemme 3.9 et finir la preuve de la même manière que dans la preuve du lemme 3.11.

$\diamondsuit$

Maintenant que l'on s'est affranchi de l'hypothèse de dénombrabilité, on peut énoncer de nouveau les théorèmes 3.12 et 3.13, dans une version localement compacte à base dénombrable d'ouverts. En effet la preuve du lemme 3.11 était la seule nécessitant cette hypothèse.

Théorème 4.14. *Soit b un π-cocycle, où $(\mathcal{H}, \pi)$ est une représentation de $(G, [\lambda])$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) b *est un π-cobord.*

(2) Il existe $E \subseteq G^0$ Borélien, de $r_*\lambda$-mesure non nulle, tel que $\sup\{\|b(g)\|_{\mathcal{H}} \mid g \in G_{|E}\} < +\infty$.

(3) Il existe $E \subseteq G^0$ Borélien, de $r_*\lambda$-mesure non nulle, tel que pour tout $x \in E$ on ait $\sup\{\|b(g)\|_{\mathcal{H}} \mid g \in s^{-1}(E) \cap r^{-1}(\{x\})\} < +\infty$.

Théorème 4.15. *Le groupoïde $(G, [\lambda])$ a la propriété (T) si et seulement si $H^1((G, [\lambda]), (\mathcal{H}, \pi)) = 0$ pour toute représentation $(\mathcal{H}, \pi)$ de $(G, [\lambda])$.*

On peut finalement utiliser cette caractérisation moins restrictive pour énoncer le théorème suivant, généralisation cette fois-ci du théorème 3.15, qui ne se servait de cette hypothèse de dénombrabilité que via la caractérisation cohomologique de la propriété (T). On conclut par l'énoncé du théorème 4.17, généralisation du corollaire 3.16 au cas localement compact à base dénombrable d'ouverts.

Théorème 4.16. *Soient* Γ *un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts, muni d'une mesure de Haar* λ_Γ*, et* $((Y, \nu), (X, \mu), p)$ *une paire ergodique de* Γ*-espaces préservant la mesure, où* μ *est une mesure de probabilité. Alors le* Γ*-espace* (Y, ν) *a la propriété* (T) *si et seulement si le* Γ*-espace* (X, μ) *a la propriété* (T).

Théorème 4.17. *Soient* Γ *un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts agissant de manière pmp sur un* Γ*-espace* (X, μ) *ergodique dont la mesure* μ *est une mesure de probabilité. Alors* Γ *a la propriété* (T) *si et seulement si* (X, μ) *a la propriété* (T).
En particulier, si on dispose d'une action libre, ergodique et pmp de Γ *sur* (X, μ) *un espace de probabilité standard, alors* Γ *a la propriété* (T) *si et seulement si la relation d'équivalence* $\mathcal{R} = \{ (x, \gamma x) \mid x \in X, \gamma \in \Gamma \}$ *a la propriété* (T).

Références

[ADR00] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids*, volume 36 of *Monographies de L'Enseignement Mathématique [Monographs of L'Enseignement Mathématique]*. L'Enseignement Mathématique, Geneva, 2000. With a foreword by Georges Skandalis and Appendix B by E. Germain.

[Ana03] Claire Anantharaman-Delaroche. Cohomology of property T groupoids and applications. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0308158, Aug 2003.

[BHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's property*. New mathematical monographs 11. Cambridge University Press, 2008.

[Gla03] Eli Glasner. *Ergodic Theory via Joinings*, volume 101 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Matheatical Society, 2003.

[Gui72] A Guichardet. Symmetric hilbert spaces and related topics. *Springer Lecture Notes in Math*, 261, 1972.

[Hah78] Peter Hahn. Haar measure for measure groupoids. *Transactions of the American Mathematical Society*, 242 :1–33, 1978.

[HV89] P. de la Harpe and A. Valette. *La propriété (T) de Kazdhan pour les groupes localement compacts*. Astérisque n^o 175. 1989. (avec un appendice de M. Burger).

[Kec75] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1975.

[Koe69] G. Koethe. *Topological Vector Spaces I*. Springer-Verlag, New York, 1969.

[Pat99] Alan L. T. Paterson. *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, volume 170 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[Ram71] Arlan Ramsay. Virtual groups and group actions. *Advances in Mathematics*, 6(3) :253 – 322, 1971.

[Ram76] Arlan Ramsay. Nontransitive quasi-orbits in mackey's analysis of group extensions. *Acta Math.*, 137 :17–48, 1976.

[Ram82] Arlan Ramsay. Topologies on measured groupoids. *Journal of Functional Analysis*, 47(3) :314 – 343, 1982.

[Zim84] Robert J. Zimmer. *Ergodic Theory and Semisimple Groups*. Monographs in Mathematics. Birkhäuser, Stuttgart, 1984.